

MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE

On suppose dans ce problème, que la vitesse des particules chargées est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui revient à négliger toute correction relativiste. Les effets de la gravitation seront également négligés.

Données :

- charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.
- perméabilité et permittivité du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m⁻¹ et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ F.m⁻¹.

A. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1. On considère un référentiel \mathcal{R} galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ au point O de coordonnées $(0, 0, 0)$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$ perpendiculaire à \vec{v}_0 (Figure 1).

- Q1 (a) Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.
 Q2 (b) Montrer que la trajectoire est plane.
 Q3 (c) On admet que la trajectoire est circulaire. Montrer que le rayon est égal à :

$$R = \frac{m v_0}{q B}$$

Pour ces questions, vous pourrez, si vous le souhaitez, introduire la quantité complexe $\underline{u}(t) = x(t) + j y(t)$.

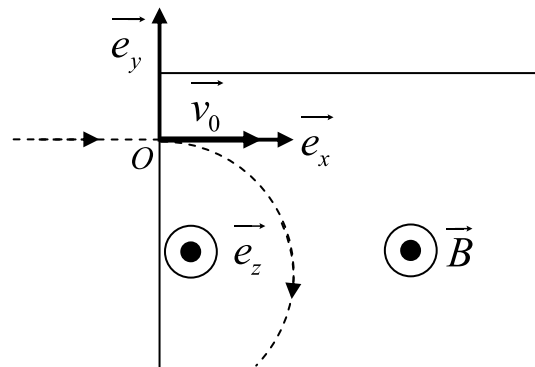


FIGURE 1 – Trajectoire d'une particule de charge q positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme.

2. Pour séparer les deux isotopes naturels de l'Uranium (l'uranium 238 et l'uranium 235), il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, représentées en Figure 2, où règne un vide poussé.

Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en U^+ (de charge électrique $q_{U^+} = e$) d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable.

Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension

$$W = V_{P_2} - V_{P_1} \text{ entre les plaques } P_1 \text{ et } P_2.$$

Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} ($B = 0,1$ T) perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2 .

Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont : $m_{U5} = 235$ u.m.a. et $m_{U8} = 238$ u.m.a.. Une unité de masse atomique (u.m.a.) vaut : $1 \text{ u.m.a.} \simeq 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

- Q4 (a) Quel est le signe de la tension W ? Justifier.

- (b) Donner l'expression littérale de la vitesse v_{U8} de l'isotope $^{328}\text{U}^+$ en F_2 , en fonction de e , W et m_{U8} . Justifier votre réponse.
- (c) Calculer la valeur de la tension W pour que la distance entre les collecteurs C_1 et C_2 soit égale à $d = 2$ cm.

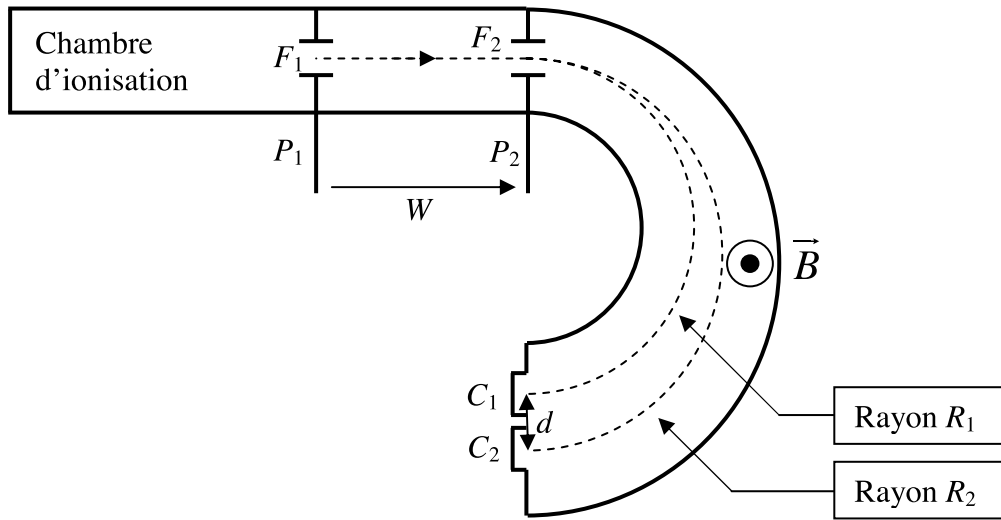


FIGURE 2 – Schéma de principe du spectrographe de masse.

B. Le cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit (Figure 3). Un champ magnétique uniforme \vec{B} ($B = 0,1$ T) règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe des demi-cylindres.

Un champ électrostatique variable \vec{E} peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5$ V lorsque le proton traverse cet espace.

Les protons, de masse $m_P = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg et de charge électrique $q_P = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque *dee*, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_S = 50$ cm.

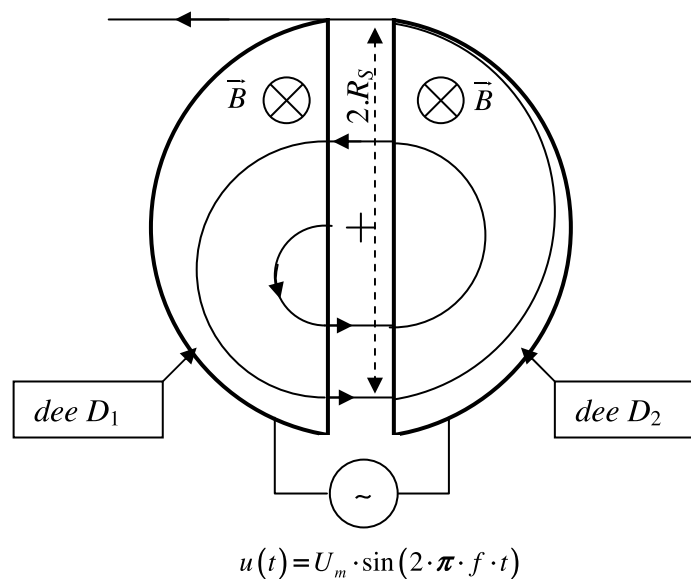


FIGURE 3 – Schéma de principe du cyclotron.

- Q7 1. Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_P , e et B . Qu'en déduisez-vous ?
- Q8 2. Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative.
- Q9 3. En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi ft)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un *dee* à l'autre.
- Q10 4. Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.
- Q11 5. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e , R_S , B , m_P et U_m . Effectuer l'application numérique.
6. Puissance rayonnée : pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge q et d'accélération a rayonne une puissance P_r , donnée par la formule de Larmor :

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

On rappelle que c est la vitesse de la lumière dans le vide.

- Q12 (a) Montrer qu'une particule chargée de charge q , de vitesse v , qui décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon R , rayonne une puissance P_r de la forme : $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q , c , μ_0 et R .
- Q13 (b) Calculer **l'énergie** rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_S = 50$ cm.
- Q14 (c) Conclure.

DES COULEURS ÉLECTRONIQUES

Certaines molécules ont la propriété d'absorber la lumière. Selon la longueur d'onde des radiations absorbées, le composé apparaît coloré...ou pas. On utilise ainsi depuis la fin du XIX^e siècle en photographie et dans l'industrie des colorants des molécules de la famille des cyanines à chaîne ouverte (ou streptocyanines), de formule $R_2 N^+ = CH - [CH = CH]_n - NR_2$ (avec R un radical carboné de type CH_3). Les cyanines peuvent également servir de marqueurs fluorescents en médecine et en biologie. On se propose de modéliser le comportement quantique de ces nanostructures pour comprendre l'origine de leur couleur.

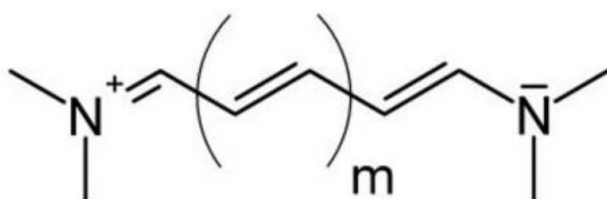


FIGURE 1 – Structure de la molécule de cyanine.

Les streptocyanines (strepto= «tordu») sont des chaînes carbonées linéaires terminées à chaque extrémité par un atome d'azote. La chaîne entre parenthèses est répétée m fois.

Des mesures spectroscopiques en laboratoire ont permis d'obtenir la longueur d'onde de la lumière **absorbée** par des cyanines de différentes tailles :

m	0	1	2	3	4
$\lambda(\text{nm})$	313	416	519	625	735

Q15

1. Prévoir la couleur de chaque composé éclairé par de la lumière blanche.

La chaîne carbonée principale de la molécule de cyanine est en fait une alternance de simples liaisons C–C et de doubles liaisons C = C permettant aux électrons π d'être délocalisés par effet mésomère sur l'ensemble de la molécule. Les électrons des doublets non liants portés par les atomes d'azote participent également à cet effet. Tous les électrons délocalisés partagent ainsi le même espace confiné et se répartissent sur les différents niveaux d'énergie de la boîte quantique équivalente. La lumière absorbée par la molécule permet ainsi aux électrons de changer de niveau d'énergie et d'effectuer des transitions vers des niveaux d'énergie plus grande.

On modélise simplement une molécule de cyanine par une boîte quantique (*i.e.* un puit de potentiel infini) unidimensionnelle de largeur L correspondant à la longueur totale de la molécule. Les fonctions d'onde possibles d'un électron placé dans cette boîte quantique sont en fait analogues aux modes propres d'une corde fixée à ses extrémités. On rappelle qu'en mécanique quantique on associe à toute particule une onde de matière de longueur d'onde λ_{DB} (longueur d'onde de de Broglie) qui s'exprime en fonction de sa quantité de mouvement p par la relation :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

où $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck.

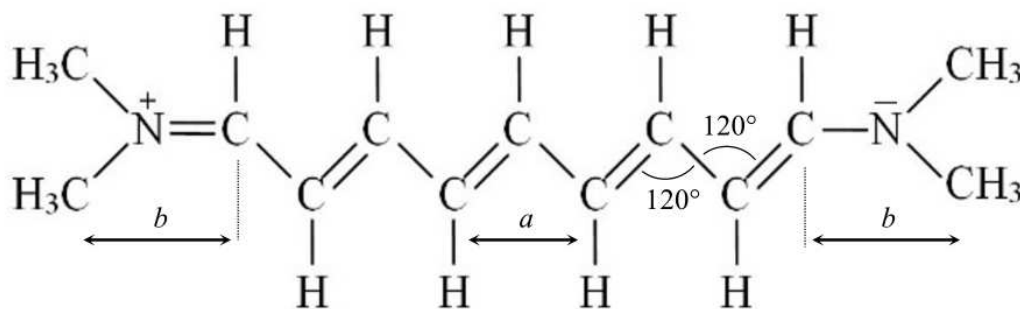
Q16

2. Représenter l'allure des trois premiers modes propres d'une corde de longueur L fixée à ses extrémités et exprimer la longueur d'onde λ_n du mode propre n en fonction de L et n . Justifier physiquement les conditions aux limites pour l'onde de matière associée à un électron délocalisé dans une molécule de cyanine.

Q17

3. En identifiant la longueur d'onde de de Broglie d'un électron à la longueur d'onde du mode propre n de la corde de longueur L , exprimer l'énergie E_n de l'électron dans le niveau n de la boîte quantique en fonction de n , h , L et de sa masse m_e .

- Q18 4. Représenter, sur une échelle d'énergie, les niveaux d'énergie d'un électron dans la molécule. Montrer que le confinement spatial dans la molécule se traduit par une énergie minimale non nulle de l'électron. Ce résultat était-il prévisible ?
- Q19 5. On note m l'indice de répétition de la chaîne carbonée dans la molécule. Déterminer le nombre d'électrons dans la boîte quantique formée par la cyanine- m .
D'après le principe d'exclusion de Pauli (*que vous verrez plus tard en chimie*), chaque niveau d'énergie ne peut accueillir que deux électrons. Par exemple, si la boîte quantique contient 1 électron, celui-ci occupe le niveau d'énergie E_1 , si l'on ajoute un deuxième électron, celui-ci possède également une énergie E_1 . Mais, si l'on ajoute un troisième électron, alors son énergie sera E_2 , car le niveau E_1 est déjà occupé par deux électrons.
- Q20 6. Quel est le niveau de plus grande énergie occupée ? Quel est le niveau de plus faible énergie libre ? Exprimer la variation minimale d'énergie ΔE d'un électron effectuant une transition vers un niveau d'énergie plus élevée, puis la longueur d'onde λ de la lumière absorbée par la cyanine- m lors de cette transition.
Dans la chaîne carbonée des molécules de cyanine étudiées, les liaisons C–C et C = C forment des angles de 120° et ont une longueur moyenne de 144 pm. On appelle a la longueur moyenne d'un groupement C = C–C le long de la molécule. Les groupes $-\text{N}-(\text{CH}_3)_2$ en bout de chaîne occupent par ailleurs chacun une longueur $b = 284\text{pm}$.

FIGURE 2 – Structure de la molécule de cyanine $m = 3$.

- Q21 7. Préciser la valeur numérique de a (*Attention : lisez bien l'énoncé, ce n'est pas 288 pm*) et exprimer la longueur totale L de la molécule de cyanine- m en fonction de a , b et m .
- Q22 8. Montrer que le modèle proposé permet d'interpréter les mesures spectroscopiques. En déduire la masse d'un électron et comparer à la valeur tabulée connue de $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.
- Q23 9. Pourquoi le composé $m = 5$ n'est-il pas utilisé comme colorant ?

MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE

D'après CCP PC 2014

A. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1. (a) Appliquons le théorème de la puissance cinétique à la particule dans \mathcal{R} galiléen :

$\frac{dE_c}{dt} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. L'énergie cinétique est donc constante. Comme la masse est supposée constante, on peut en déduire que la vitesse est constante.

- (b) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule dans \mathcal{R} galiléen :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \iff m \begin{vmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit en projection sur Oz : $m\ddot{z} = 0$. Soit $\dot{z} = cste = 0$ car $v_{0z} = 0$ puis $z = cste = 0$ car $z_0 = 0$.

La trajectoire est donc plane.

- (c) Le mouvement est circulaire et uniforme. On peut donc écrire $\vec{OM} = R\vec{e}_r$, $\vec{v} = v_\theta\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -\frac{v_\theta^2}{R}\vec{e}_r$. D'où :

$$-m\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r = q\vec{v} \wedge B\vec{e}_z \Rightarrow m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow m\frac{v_0^2}{R} = qvB$$

On a $q\vec{v} \wedge \vec{B} = qvB$ car \vec{v} et \vec{B} sont orthogonaux (et $q > 0$). On obtient le rayon : $R = \frac{mv_0}{qB}$.

2. (a) Les ions doivent être accélérés entre P_1 et P_2 . Ils sont soumis à la seule force électrique entre P_1 et P_2 . Les particules ont tendance à descendre les énergies potentielles (pensez à une bille dans un jouet), puisque $E_p = qV$ et que $q > 0$, les particules de charge positive ont tendance à descendre les potentiels électriques. Puisque l'on va de P_1 vers P_2 , c'est que $V(P_2) < V(P_1)$, d'où $W = V_{P_1} - V_{P_2} < 0$.

- (b) Si la particule de F_1 avec une vitesse nulle, elle arrive en F_2 avec la vitesse v_{U8} telle que, d'après le théorème de l'énergie mécanique, $E_{m,2} - E_{m,1} = \mathcal{W}_{nc} = 0$ car seule la force électrostatique s'applique et elle est conservative. D'où $E_{m,2} = E_{m,1} \iff E_{c,2} + qV(P_2) = E_{c,1} + qV(P_1) \simeq qV(P_1)$ d'où $\frac{1}{2}m_{U8}v_{U8}^2 =$

$$q(V_{P_1} - V_{P_2}) = -qW \Rightarrow v_{U8} = \sqrt{\frac{-2eW}{m_{U8}}}$$

- (c) Les deux isotopes partent du même point, la distance entre les collecteurs d est donc égale à la différence entre les deux diamètres des trajectoires :

$$d = D_{U8} - D_{U5} = 2(R_{U8} - R_{U5})$$

Attention au facteur 2!, faite un schéma et représentez les rayons.

En utilisant le lien entre la tension W et la valeur de vitesse en F_2 , on obtient :

$$R_{U8} = \frac{mv_{U8}}{eB} = \sqrt{\frac{-2Wm_{U8}}{eB^2}} \quad \text{d'où}$$

$$d = 2(R_{U8} - R_{U5}) = 2\sqrt{\frac{-2mW}{qB^2}}(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}}) \quad \text{d'où} \quad W = -\frac{qd^2B^2}{8(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}})^2}$$

A.N : $W = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times (0,02)^2 \times 0,1^2}{8 \times 1,66 \cdot 10^{-27} (\sqrt{238} - \sqrt{235})^2}$ $W = -5,1 \text{ kV}$

B. Le cyclotron

- Q30 1. La trajectoire circulaire de longueur $L = \pi R$ (un demi-tour) est parcourue à la vitesse constante $v = \frac{eBR}{m_P}$ (calculée ci-dessus) en un temps :

$$T_{1/2} = \frac{L}{v} = \frac{\pi R}{v} \quad \boxed{T_{1/2} = \frac{\pi m_P}{qB}}$$

Ce temps est indépendant du rayon. On peut donc en déduire que le temps pour effectuer un demi-tour est toujours le même.

- Q31 2. On utilise une tension $u(t)$ alternative sinusoïdale pour que le proton soit accéléré de manière optimale. En effet, il faut à chaque demi-tour changer le sens dans lequel on accélère la particule, d'où le fait de changer la tension de signe. De plus, on peut prendre un signal périodique car $T_{1/2}$ est une constante (indépendante de la vitesse ou du rayon).

- Q32 3. On a ainsi

$$\frac{T}{2} = T_{1/2} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_{1/2}} = \frac{eB}{2\pi m_P}$$

A.N. $f = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,1}{2\pi \times 1,67 \cdot 10^{-27}} \quad \boxed{f = 1,5 \text{ MHz}}$

- Q33 4. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est R_S . Or on avait $v_S = \frac{eR_S B}{m_P}$ d'où

$$\boxed{E_{CS} = \frac{1}{2} m_P v_S^2 = \frac{e^2 R_S^2 B^2}{2m_P}}$$

A.N. : $E_{CS} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,5 \times 0,1)^2}{2 \times 1,67 \cdot 10^{-27}} \quad \boxed{E_{CS} = 1,91 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,12 \text{ MeV}}$

- Q34 5. Notons $2N$ le nombre de demi-tours effectués (et donc le nombre d'accélération subies). A chaque accélération, le proton gagne : $\Delta E_C = qU_m$ d'où $\Delta E_{C,2N} = 2NqU_m = E_{CS}$ or $E_{CS} = \frac{e^2 R_S^2 B^2}{2m_P}$

$$\boxed{N = \frac{eB^2 R_S^2}{2m_P U_m}}$$

A.N. : $N = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,1^2 \times 0,5^2}{2 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 10^5} = 1,2$ tour. Puisque l'on ne peut faire qu'un nombre entier ou demi-entier de tour et qu'au bout d'un tour la particule n'est pas encore sortie, alors on fait **1 tour et demi** avant de sortir.

- Q35 6. (a) Pour une trajectoire circulaire uniforme $a = \frac{v^2}{R}$ d'où

$$\boxed{P_r = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \left(\frac{v^2}{R} \right)^2 = \alpha v^4 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R^2}}$$

- Q36 (b) L'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon est

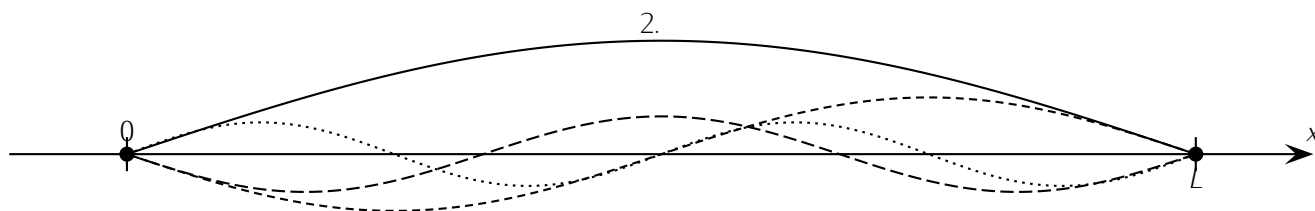
$$E = P_r T_{1/2} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R^2} \left(\frac{eBR_S}{m_P} \right)^4 \frac{\pi m_P}{eB} = \frac{\mu_0 e^5 B^3 R_S^2}{6cm_P^3}$$

A.N. : Calculons E en eV : $E = \frac{4\pi 10^{-7} (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \times 0,1^3 \times 0,5^2}{6 \times 3 \cdot 10^8 \times (1,67 \cdot 10^{-27})^3} = 3,9 \cdot 10^{-33} \text{ J} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ eV}$.

- Q37 (c) Cette énergie rayonnée est négligeable devant l'énergie cinétique de la particule et il est donc raisonnable d'estimer que la perte par rayonnement est nulle, c'est à dire que l'énergie de la particule est constante à l'intérieur d'un "dee".

DES COULEURS ÉLECTRONIQUES

1. Lorsqu'il est éclairé par de la lumière blanche, un composé apparaît de la couleur complémentaire à celle qui est absorbée. Ainsi la cyanine $m = 1$ qui absorbe la lumière dans le bleu (à 416 nm) apparaît jaune-orange et la cyanine $m = 4$ qui absorbe dans le rouge (à 625 nm) apparaît de couleur bleu-vert. De même, la cyanine $m = 2$ qui absorbe dans le vert (à 519 nm) apparaîtra magenta (bleu + rouge) et la cyanine $m = 3$ qui absorbe dans le jaune (à 580 nm) sera plutôt violet. On pourra remarquer que la cyanine $m = 0$ absorbe dans l'ultraviolet (à 313 nm) et reste parfaitement transparente dans le visible, ce qui rend ce composé incolore.



Les modes propres de la corde vibrante sont les ondes stationnaires possédant un nœud à chaque extrémité. Chaque mode propre possède un nombre entier de fuseaux sur la longueur L de la corde. La distance entre deux nœuds consécutifs vaut $\lambda/2$. Pour le mode propre n , on a donc la relation :

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

soit :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

3. L'amplitude de l'onde de matière est en fait liée à la probabilité de présence de la particule dans l'espace. Les électrons étant confinés dans la molécule, ils ne peuvent pas sortir de la chaîne principale. La probabilité de présence aux extrémités de la chaîne est donc nulle. On retrouve les mêmes conditions aux limites que sur la corde fixée à ses extrémités, ce qui permet d'utiliser efficacement cette analogie.

Un électron de masse m_e possédant la quantité de mouvement \vec{p} se déplace à la vitesse $\frac{\vec{p}}{m_e}$. Son énergie cinétique s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{p}{m_e} \right)^2 = \frac{p^2}{2m_e}$$

En identifiant la longueur d'onde de de Broglie de l'électron à la longueur d'onde du mode propre n , il vient :

$$\frac{h}{p} = \frac{2L}{n}$$

soit :

$$p = \frac{nh}{2L}$$

On en déduit l'énergie de l'électron dans le niveau n :

$$\mathcal{E}_n = \frac{n^2 h^2}{8m_e L^2}$$

(assimilée à son énergie cinétique si l'on considère que le potentiel est nul au fond du puits).

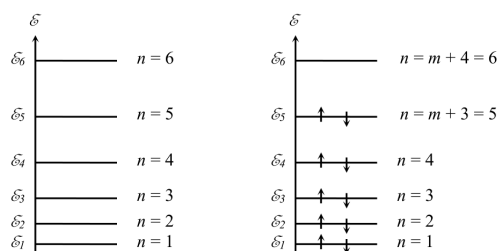


FIGURE 1 – Diagramme des niveaux d'énergie.

4. L'énergie des électrons varie avec n^2 et les niveaux sont de plus en plus écartés. On peut les représenter sur le diagramme suivant :

Le niveau d'énergie la plus basse est le niveau fondamental, d'énergie

$$\mathcal{E}_f = \frac{h^2}{8m_e L^2}$$

correspondant à $n = 1$. Cette énergie est non nulle, même s'il s'agit du niveau fondamental. Cette propriété est due au confinement spatial des électrons. D'après l'inégalité de Heisenberg spatiale, on a en effet :

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

Le confinement d'un électron le long de la molécule impose une valeur maximale à Δx qui impose à son tour une valeur minimale non nulle à Δp , donc à l'énergie de l'électron, même dans l'état fondamental.

5. On compte quatre électrons π dans les deux doubles liaisons de la chaîne principale (en dehors du motif répété), deux électrons dans le doublet non liant de l'atome d'azote, auxquels s'ajoutent deux électrons π pour chaque motif répété. Avec m motifs dans la cyanine- m , on obtient ainsi $2m + 6$ électrons délocalisés dans la molécule. Le principe d'exclusion de Pauli interdit cependant d'avoir deux électrons dans la même case quantique : chaque niveau n d'énergie \mathcal{E}_n pourra donc être occupé par deux électrons possédant des spins antiparallèles (\uparrow pour l'un et \downarrow pour l'autre). Le remplissage des couches commençant par les niveaux les plus bas en énergie, on obtient le diagramme d'occupation ci-dessus (diagramme de droite, en prenant par exemple $m = 2$). Les $2m + 6$ électrons délocalisés de la molécule remplissent donc les $m + 3$ premiers niveaux d'énergie.
6. Les $m + 3$ premiers niveaux d'énergie sont occupés. Le premier niveau libre est le niveau $m + 4$, la première transition possible pour un électron est le passage du niveau $m + 3$ au niveau $m + 4$ en absorbant un photon d'énergie minimale :

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{m+4} - \mathcal{E}_{m+3} = \left((m+4)^2 - (m+3)^2 \right) \frac{h^2}{8m_e L^2} = (2m+7) \frac{h^2}{8m_e L^2}$$

Cette variation d'énergie est liée à la fréquence ν du photon par la relation d'Einstein :

$$\Delta \mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

On en déduit ainsi la longueur d'onde de la lumière absorbée par la cyanine- m lors de cette transition :

$$\lambda = \frac{8m_e L^2 c}{(2m+7)h}$$

7. La longueur a le long de la molécule s'obtient par projection de la longueur des liaisons C = C et C - C :

$$a = 2 \times 144 \times \cos 60^\circ = 2 \times 144 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 249 \text{ pm}$$

Par ailleurs, le long de la molécule, on compte $(m + 1)$ distances a et deux longueurs b , soit :

$$L = (m + 1)a + 2b$$

8. On reprend l'expression de la longueur d'onde de la lumière absorbée par la cyanine- m , connaissant à présent la longueur de la molécule :

$$\lambda = \frac{8m_e c ((m + 1)a + 2b)^2}{h (2m + 7)}$$

On trace alors le graphe de λ en fonction de $X = \frac{((m+1)a+2b)^2}{(2m+7)}$:

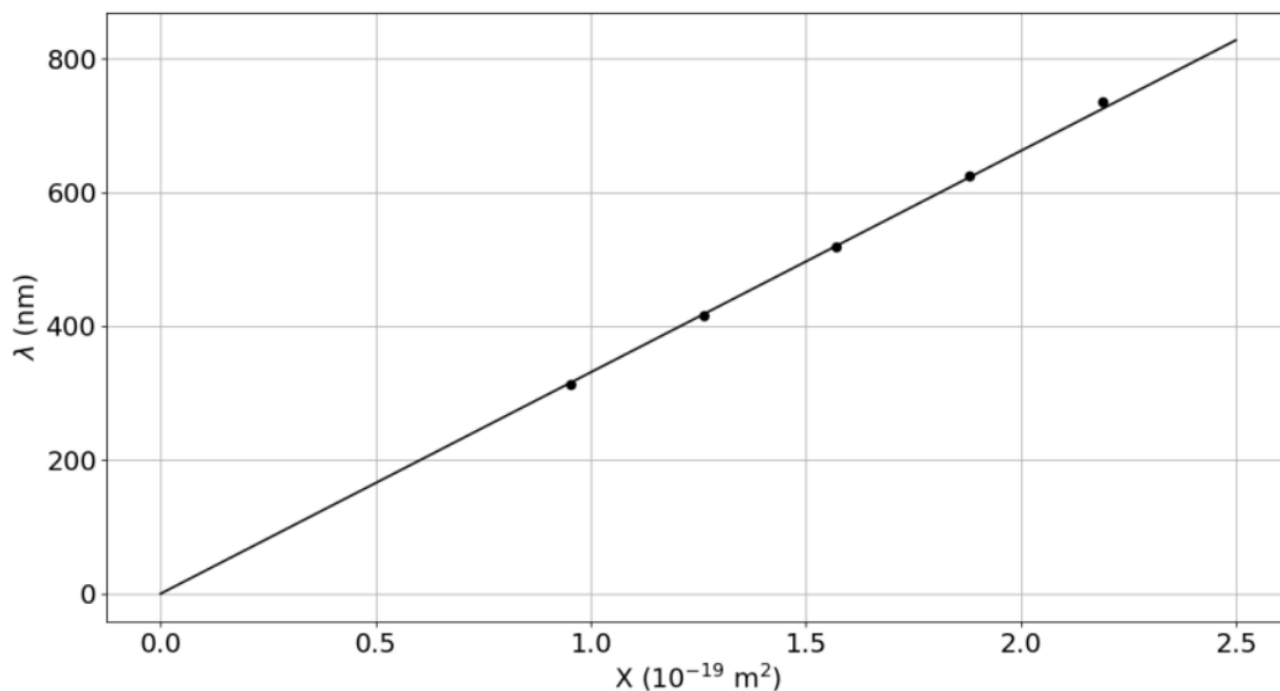


FIGURE 2 – Graphique de λ en fonction de X .

Les points s'alignent statistiquement sur une droite passant par l'origine, comme le prévoit le modèle. L'accord entre le modèle étudié et les points expérimentaux est excellent. La pente de la droite se calcule avec Python

Bien sûr, ceci n'était pas demandé dans le DM

:

```
import numpy as np

lambda_nm = np.array([313, 416, 519, 625, 735]) * 1e-9 # m
m = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
a = 249e-12 # m
b = 144e-12 # m
X = ((m+1)*a + 2*b)**2 / (2*m + 7)
alpha = np.mean(lambda_nm / X)
u_alpha = np.std(lambda_nm / X, ddof=1)
```

On obtient pour la pente :

$$\alpha = 3.31 \times 10^{12} \text{ m}^{-1}$$

avec l'incertitude-type :

$$u(\alpha) = 2.8 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

On identifie son expression grâce au modèle :

$$\alpha = \frac{8m_e c}{h}$$

ce qui permet de calculer la masse d'un électron confiné dans la boîte quantique :

$$m_e = \frac{\alpha h}{8c} = 9.14 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

et l'incertitude-type associée :

$$u(m_e) = \frac{h}{8c} u(\alpha) = 7.7 \times 10^{-33} \text{ kg}$$

Pour comparer avec la valeur tabulée, on calcule l'écart normalisé sous la forme :

$$Z = \frac{m_{e,\text{exp}} - m_{e,\text{tab}}}{u(m_{e,\text{exp}})} = 0.4$$

Puisque $|Z| < 2$, la valeur obtenue pour la masse de l'électron est bien compatible avec la valeur tabulée, ce qui confirme encore la validité du modèle. Il est tout de même remarquable (voire surprenant) qu'un modèle aussi simple rende aussi bien compte des résultats expérimentaux, sachant qu'en réalité le puits de potentiel dans lequel sont placés les électrons varie dans l'espace au voisinage de chaque atome de la chaîne moléculaire...

9. On extrapole le modèle obtenu pour la cyanine $m = 5$ pour prévoir la longueur d'onde absorbée par la molécule. On obtient ainsi $\lambda = 828 \text{ nm}$. La molécule de cyanine $m = 5$ absorbe dans l'infrarouge : elle sera parfaitement transparente dans le visible et ne fera apparaître aucune couleur. Elle ne peut donc pas servir de colorant.