

FORCES CENTRALES

Qu'est-ce qu'une force centrale ?

FORCES CENTRALE

Montrer qu'une particule soumise à une force centrale possède un moment cinétique en O constant.

FORCES CENTRALES

Définir la constante des aires.

FORCES CENTRALES

Montrer qu'une particule soumise à une force centrale possède un mouvement plan.

FORCES CENTRALES

Démontrer la loi des aires.

FORCES CENTRALES

Soit une particule matérielle dans un champ de force centrale conservative. Établir l'expression de son énergie potentiel effective.

FORCES CENTRALES

Soit une particule soumise à une force Newtonienne

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

. Montrer que si $k < 0$ la particule est toujours en état de diffusion.

FORCES CENTRALES

Soit une particule soumise à une force Newtonienne

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

attractive ($k > 0$). À quelle condition sur l'énergie mécanique son mouvement est lié ?

FORCES CENTRALES

Énoncer les lois de Kepler.

On définit la constante des aires $\vec{C}$ par $\vec{L}_O(M) = m\vec{C}$

D'après le théorème du moment cinétique
 $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. Ainsi $\vec{L}_O(M)$ est constant.

Une force est dite centrale si sa droite d'action passe constamment par un point fixe du référentiel appelé centre de force.

L'énergie mécanique vaut
 $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$ or
 $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ et $C = r^2\dot{\theta}$
 Donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p$.
 Ainsi

$$E_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p$$

L'aire balayée par le rayon vecteur pendant dt est
 $dA = \frac{1}{2} |\vec{OM} \wedge \vec{v} dt| = \frac{C}{2} dt$.
 Ainsi

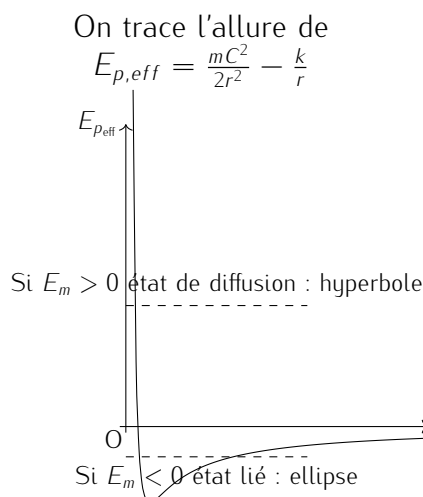
$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

D'après la conservation du moment cinétique, à tout instant

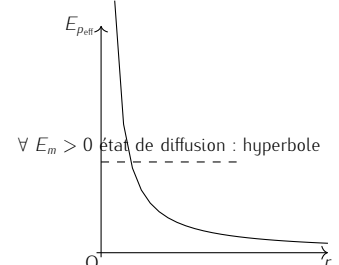
$$\vec{OM} \wedge \vec{v} = \vec{C}$$

Ainsi le plan $(\vec{OM}, \vec{v})$ reste orthogonal à $\vec{C}$ qui est fixe. Le mouvement est donc plan.

Dans le référentiel de Kepler les planètes P décrivent des ellipses dont le soleil S est l'un des foyers. Pendant l'intervalle de temps Δt , l'aire balayée par le vecteur position $\vec{SP}$ est proportionnelle à Δt . Le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes du système solaire (T période, a demi-grand axe).



L'énergie potentielle effective de la particule est $E_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$. Il s'agit d'une fonction strictement décroissante, ainsi quelle que soit la valeur de l'énergie mécanique la particule se trouve en état de diffusion.



FORCES CENTRALE

On considère un objet soumis à la force de gravitation. Montrer que si le mouvement est circulaire alors il est uniforme.

FORCES CENTRALE

On considère un objet soumis à la force de gravitation en mouvement circulaire uniforme. Déterminer sa période de rotation.

FORCES CENTRALE

On considère un objet soumis à la force de gravitation en mouvement circulaire uniforme. Déterminer l'expression de son énergie mécanique.

FORCES CENTRALE

On considère un objet soumis à la force de gravitation et dans un état lié. Déterminer l'expression de son énergie mécanique en fonction du demi-grand axe de la trajectoire.

FORCES CENTRALE

Citer des exemples d'orbites de satellites ainsi que leur mission.

FORCES CENTRALES

Justifier la localisation des satellites géostationnaires dans le plan équatorial.

FORCES CENTRALES

Déterminer l'altitude des satellites géostationnaires.

FORCES CENTRALES

Exprimer la première vitesse cosmique.

FORCES CENTRALES

Exprimer la seconde vitesse cosmique.

On a $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}$ et la seconde loi de Newton donne $-m\frac{v^2}{R} = -\frac{k}{R^2}$ donc

$$E_m = -\frac{k}{2R}$$

La seconde loi de Newton projetée selon $\vec{e}_r$ donne $-mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}$ or $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ d'où $T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}R^3$

On a $r = R = cste$ et d'après la conservation du moment cinétique $r^2\dot{\theta} = C$ donc $\dot{\theta} = cste$, ainsi $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $v = R\dot{\theta} = cste$

Pour qu'un satellite reste en position fixe par rapport à un point sur la surface terrestre, il doit orbiter à la même vitesse angulaire que la rotation de la Terre. De plus, les satellites ne sont soumis qu'à la seule force gravitationnelle, leur mouvement est donc dans un plan qui contient le centre de la Terre. Le seul plan possible est le plan équatorial.

- Orbites basses polaires (< 2000 km) : observation terrestre
- Orbites moyennes (entre 2000 et 20000 km) : navigation
- Orbite géostationnaire (36 000 km) : communication

Au périgée
 $E_m(r_p) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_p^2} - \frac{k}{r_p}$

À l'apogée

$$E_m(r_a) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_a^2} - \frac{k}{r_a}$$

La bonne combinaison donne :

$$E_m \times (r_p^2 - r_a^2) = 0 - k(r_p - r_a) \Leftrightarrow E_m \times (r_p - r_a)(r_p + r_a) = -k(r_p - r_a) \Leftrightarrow E_m = -\frac{k}{r_p + r_a} = -\frac{k}{2a}$$

Donc

$$E_m = -\frac{k}{2a}$$

Pour un satellite à la surface de la Terre et possédant une trajectoire parabolique (état de diffusion) :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM}{R_T} = Cte = 0$$

Donc :

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R_T}} \simeq 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

Par application de la seconde loi de Newton sur M dans la base polaire, pour un satellite en orbite circulaire rasante on obtient $m\frac{v^2}{R_T} = \frac{\mathcal{G}mM}{R_T^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R_T}} \simeq 7,92 \text{ km.s}^{-1}$

Le satellite possède une vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T_S}$ avec $T_S = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$

La seconde loi de Newton projetée selon $\vec{e}_r$: $r\omega^2 =$

$$\mathcal{G}\frac{M}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}M}{\Omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}MT_S^2}{4\pi^2}}$$

d'où $h = R - R_T =$

$$\sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}MT_S^2}{4\pi^2}} - R_T = 3,579.10^3 \text{ km}$$

M_6 Champ de force centrale

Conseils pour ce TD

- Les mêmes que ceux de M_5 .
- Privilégier la version scalaire du théorème du moment cinétique.
- Pour déterminer le moment d'une force par rapport à un point ou sa projection sur un axe, faire une figure sur laquelle cette force doit apparaître, utiliser ensuite la notion de bras de levier ou la décomposition des vecteurs suivant les vecteurs de base.
- Utiliser une technique analogue pour le calcul d'un moment cinétique.
- Toujours vérifier la cohérence des résultats en utilisant par exemple la règle de la main droite.

Satellites

Entraînement 19.1 — Mission INTEGRAL.



International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory (INTEGRAL) est un observatoire spatial d'astrophysique européen mis en orbite en 2002. Son orbite de travail autour de la Terre est une ellipse dont le périégée et l'apogée se trouvent respectivement à 9 000 km et 153 000 km du centre de la Terre. Données : la masse de la Terre est $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, celle du satellite $m = 3,5$ tonnes. La constante de gravitation vaut $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

a) Déterminer le demi-grand axe a de l'orbite du satellite.

b) Calculer la période de révolution d'INTEGRAL.

c) Calculer l'énergie mécanique du satellite.

d) Calculer la norme de la vitesse du satellite à son apogée.

e) Calculer la norme de la vitesse du satellite à son périégée.

Entraînement 19.2 — Lois de Kepler.



a) Sachant que la trajectoire de la Terre est presque un cercle de rayon $a = 150 \cdot 10^6$ km et que la constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI, calculer la masse du soleil.

.....

b) La période de révolution de Mars autour du Soleil est de 1,9 année, en déduire a' le demi grand axe de l'ellipse décrite par Mars du soleil.

.....

c) La comète de Halley est passée en 1986 au voisinage de la Terre. Sa période de révolution autour du Soleil est de 76 ans et sa distance minimale au Soleil est 0,59 u.a (unité astronomique correspondant à la distance moyenne Terre Soleil). Calculer la plus grande distance de cette comète au Soleil.

.....



Entraînement 19.3 — Lois de Kepler.



Le Petit Prince réside sur un astéroïde de rayon $R = 30$ m et de masse $m = 2,0 \cdot 10^8$ kg. La constante de gravitation vaut $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

a) Calculer la norme v_s de la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il parcoure une orbite basse autour de l'astéroïde (vitesse de satellisation).

.....

b) Calculer la norme v_l de la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction de l'astéroïde (vitesse de libération).

.....

Réponses mélangées

$$63\text{h}36 \text{ min} \quad M_S \simeq 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad v_s = 0,021 \text{ m.s}^{-1}$$

$$9,2 \text{ km.s}^{-1} \quad v_s = 0,030 \text{ m.s}^{-1} \quad 81 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$-8,6 \text{ GJ.} \quad 230 \cdot 10^6 \text{ km} \quad r_A = 35,29 \text{ u.a} \quad 0,54 \text{ km.s}^{-1}$$

Exercice 1 : Oscillateur en rotation

On considère un point matériel M de masse m , attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité de ce ressort est attachée en un point, fixe par rapport au référentiel terrestre que l'on supposera galiléen, et autour duquel l'ensemble est libre de tourner dans un plan horizontal. Il est lancé avec une vitesse initiale v_i orthoradiale, et une longueur initiale $r = r_i$. On néglige tout frottement.

1. Montrer que le moment cinétique de ce système se conserve au cours du mouvement. En déduire une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de r et des paramètres initiaux, et montrer qu'il est possible de résumer le mouvement à une équation différentielle portant uniquement sur la variable r .
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur r_i et v_i pour que le mouvement soit circulaire.

Exercice 2 : Le cauchemar de Philippe

Le petit Philippe passe une nuit agitée. Il rêve que la loi de la gravitation est élevée à la puissance $\frac{5}{2}$!! Dans son cauchemar, les journées s'écoulaient dans l'angoisse d'une catastrophe imminente. Élevée à la puissance $5/2$, la loi de la gravitation ne permettait plus à la Terre qu'une orbite circulaire particulièrement instable autour du Soleil. Les prédicateurs de tout poil ne manquaient aucune occasion d'annoncer la fin du monde. Certains affirmaient que la Terre s'écraserait bientôt sur le Soleil, d'autres pensaient qu'elle dériverait vers l'infini et au-delà.

Dans le cauchemar de Philippe, la loi de la gravitation est remplacée par une force de type $\vec{F} = -\frac{k}{r^5}\vec{e}_r$, avec $k > 0$.

1. Définir et exprimer une énergie potentielle effective pour la Terre.
2. Montrer qu'une trajectoire circulaire est possible.
3. Discuter sa stabilité.

Exercice 3 : Satellites

La station spatiale internationale (ou ISS, masse m) décrit une orbite circulaire autour de la Terre à une altitude $h = 300$ km (orbite dite basse). On donne le rayon de la Terre $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km et la valeur du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Pourquoi l'ISS est-elle placée sur une orbite basse ?
2. Exprimer g_0 en fonction de R_T , $\mathcal{G}$ et M_T la masse de la Terre. (On pourra rappeler l'expression du poids, d'une part, et de la force gravitationnelle d'autre part).
3. Déterminer la vitesse de l'ISS sur son orbite, ainsi que la valeur de sa période de révolution T .
4. Un second satellite est également en orbite circulaire autour de la Terre, à une altitude $h' = 2h$. Que vaut la période T de ce satellite ?

Exercice 4 : Premier vol habité (par un homme)

Le 12 avril 1961, le commandant soviétique Y. Gagarine fut le premier cosmonaute, le vaisseau spatial satellisé était un engin de masse $m = 4725$ kg. Les altitudes au périgée P et à l'apogée A étaient $z_P = 180$ km et $z_A = 327$ km.

Exprimer la vitesse v du satellite en fonction de son altitude z , de z_P , z_A , M_T , R_T (masse et rayon de la Terre) et de $\mathcal{G}$, la constante de gravitation. Calculer v en P et en A .

Exercice 5 : Satellite et frottements

Un satellite M de masse m est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial de la Terre. On travaillera dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{\text{Géo}}$ considéré comme galiléen. On notera Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans $\mathcal{R}_{\text{Géo}}$.

1. Déterminer la vitesse v_0 du satellite, l'énergie potentielle E_{p0} , cinétique E_{c0} et mécanique E_{m0} du satellite sur cette orbite en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$, M_T la masse de la Terre et des données.
2. Avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point P de latitude λ . Sa vitesse est la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ due à la rotation de la Terre, supposée sphérique de rayon R_T . Déterminer E_{p1} , E_{c1} et E_{m1} du satellite au point P . Pour le placer sur son orbite, il faut lui fournir $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$.
Où doit-on placer les bases de lancement pour que ΔE soit minimale ?
3. On suppose maintenant que l'altitude du satellite étant faible devant R_T , il subit les frottements de l'atmosphère. Son énergie mécanique E_m diminue avec le temps selon la loi $E_m = E_{m0}(1 + \alpha t)$. Quel est le signe de α ? On suppose que la trajectoire reste pratiquement circulaire. Déterminer en fonction de t , le rayon r de la trajectoire, et la vitesse v du satellite. Comment v varie-t-elle ? Commentez.



Exercice 6 : Force de gravitation

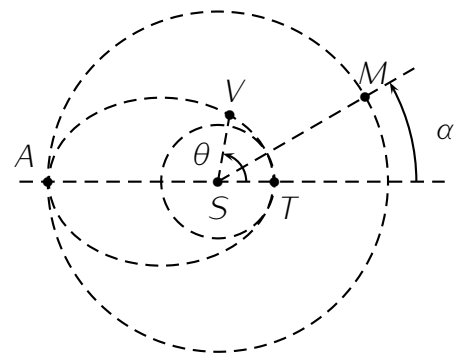
1. Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par la Terre de centre T et de masse M_T sur un objet A de masse m en fonction de la Constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI et de $r = TA$.
2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.
3. Donner l'expression de l'énergie mécanique du point A ayant une vitesse v à la surface de la Terre, en déduire la valeur de la vitesse de libération v_L : vitesse minimale donnée à l'objet pour qu'il puisse se libérer de l'attraction terrestre. Calculer v_L . ($M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km).
4. La Terre décrit autour du soleil S de masse $M_S = 0,33 \cdot 10^6 M_T$ une orbite pratiquement circulaire de rayon $a = 150 \cdot 10^6$ km. Déterminer en fonction de a , la position d'équigravité du système $T - S$ par rapport à la Terre ; endroit de l'espace où la force de gravitation due à S est compensée par celle due à T .



Exercice 7 : Voyage Terre – Mars

Au cours d'un voyage interplanétaire, un vaisseau spatial V de masse $m = 1000$ kg, est transféré depuis la Terre T jusqu'à la planète Mars M . Ce transfert s'effectue selon une orbite elliptique (ellipse de HOHMANN) tangente aux deux orbites coplanaires pratiquement circulaires, de T et M , de rayons $r_T = ST = 150$ millions de km et $r_M = SM = 230$ millions de km, et dont le soleil est un foyer.

On négligera l'influence des autres corps et on ne considérera que l'attraction solaire. Masse du soleil $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI. Toutes les grandeurs sont à déterminer en fonction de r_T , r_M , $\mathcal{G}$ et M_S , puis à évaluer numériquement.



1. Le demi-grand axe de l'orbite de transfert de HOHMANN.
2. Rappeler l'énoncé de la troisième loi de Kepler. Quelle portion de l'ellipse de transfert, le vaisseau décrit-il ? En déduire la durée τ de ce voyage.
3. Que vaut l'énergie mécanique du vaisseau lorsqu'il se trouve sur l'orbite terrestre ? Sur l'orbite de transfert ? En déduire la variation de vitesse à communiquer au vaisseau lors du lancement depuis l'orbite terrestre. Puis, de la même manière, trouver la variation de vitesse à lui communiquer lors de son arrivée aux abords de Mars.

4. Quelle est l'augmentation de l'énergie mécanique totale du vaisseau au cours de ce transfert.
5. Mars doit se situer en A au même instant que le vaisseau V . En appliquant la troisième de Kepler, trouver la période de rotation de Mars. En déduire sa vitesse angulaire. Et enfin, en déduire la position que doit avoir M par rapport à T à l'instant du départ : angle $\alpha = (ST, SM)$.