

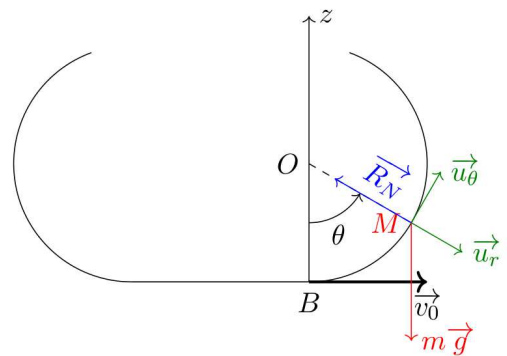
Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

SOUVENIRS DU DS₅

- Q1 1. Vous observez en mode XY les deux signaux $u_e = E \cos(\omega t)$ et $u_s = S \cos(\omega t + \varphi)$. Que voyez-vous à l'écran si $\varphi = 0$? si φ est quelconque ?
- Q2 2. Comment est alimenté un ALI ?
- Q3 3. Souhaitez tracer le diagramme de Bode d'un filtre. Quelles mesures effectuez-vous ? Que calculez-vous ? Comment doivent être répartis les points de mesure ?
- Q4 4. Expliquez comment vous mesurez un déphasage entre deux tensions synchrones. *On s'appuiera sur un schéma, on détaillera les mesures à effectuer et les calculs pour conclure.*

Le half-pipe est resté à l'ombre toute la journée et est donc glacé, les frottements du snowboard sur la neige sont alors négligeables. On considère que la snowbordeuse arrive sur le demi-tube, en B, avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ de norme $v_0 = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ comme indiqué sur le schéma. Le half-pipe est assimilé à un demi-cylindre de rayon $R = 5 \text{ m}$.



- Q5 1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de m, g et z , puis en fonction de m, g, R et θ .
- Q6 2. Que peut-on dire de l'énergie mécanique lors du mouvement sur le half-pipe ?

On se propose de réaliser un filtre pour accéléromètre. Les accéléromètres sont des composants dont le premier objectif est de mesurer l'accélération. On peut en trouver dans de nombreux appareils tels les téléphones portables ou les manettes de Wii.

Un deuxième objectif sera d'étudier un traitement analogique permettant d'obtenir la vitesse et la position à partir de la mesure du signal fourni par l'accéléromètre.

On donne ci-dessous les formes canoniques d'un certain nombre de filtres du premier et du second ordre. $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ représente la pulsation réduite et ω_0 la pulsation propre.

$$\underline{H}_1(jx) = \frac{H_0}{1 + jx} \quad \underline{H}_2(jx) = \frac{H_0 jx}{1 + jx} \quad \underline{H}_3(jx) = \frac{H_0(1 + (jx)^2)}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}$$

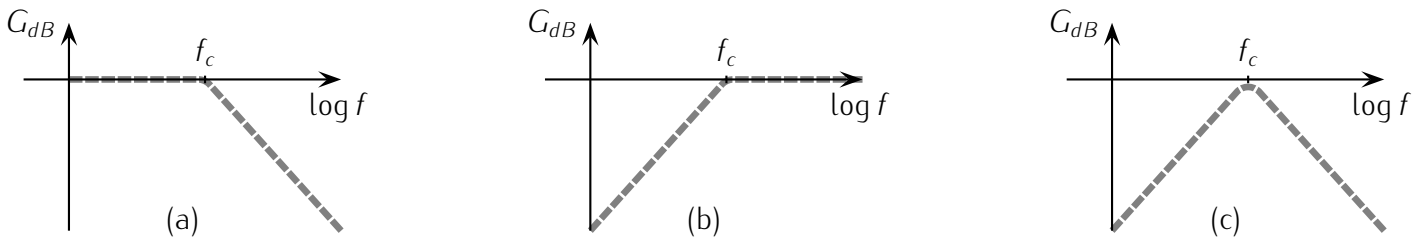
$$\underline{H}_4(jx) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \quad \underline{H}_5(jx) = \frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \quad \underline{H}_6(jx) = \frac{H_0 (jx)^2}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}$$

1 Suppression de la composante continue

Les composants électroniques ont un comportement qui varie très légèrement avec la température, ce qui fait que la plupart des appareils de mesure ont une légère composante continue ou basse fréquence qui ne reflète pas nécessairement le signal que l'on cherche à étudier (l'accélération ici).

L'échelle de temps typique considérée pour ces variations indésirables est de l'ordre de 50 s au moins, soit des fréquences inférieures à 0,02 Hz.

Pour éliminer ce problème, on traite le signal en le faisant passer par un filtre de fréquence de coupure $f_c = 1$ Hz.



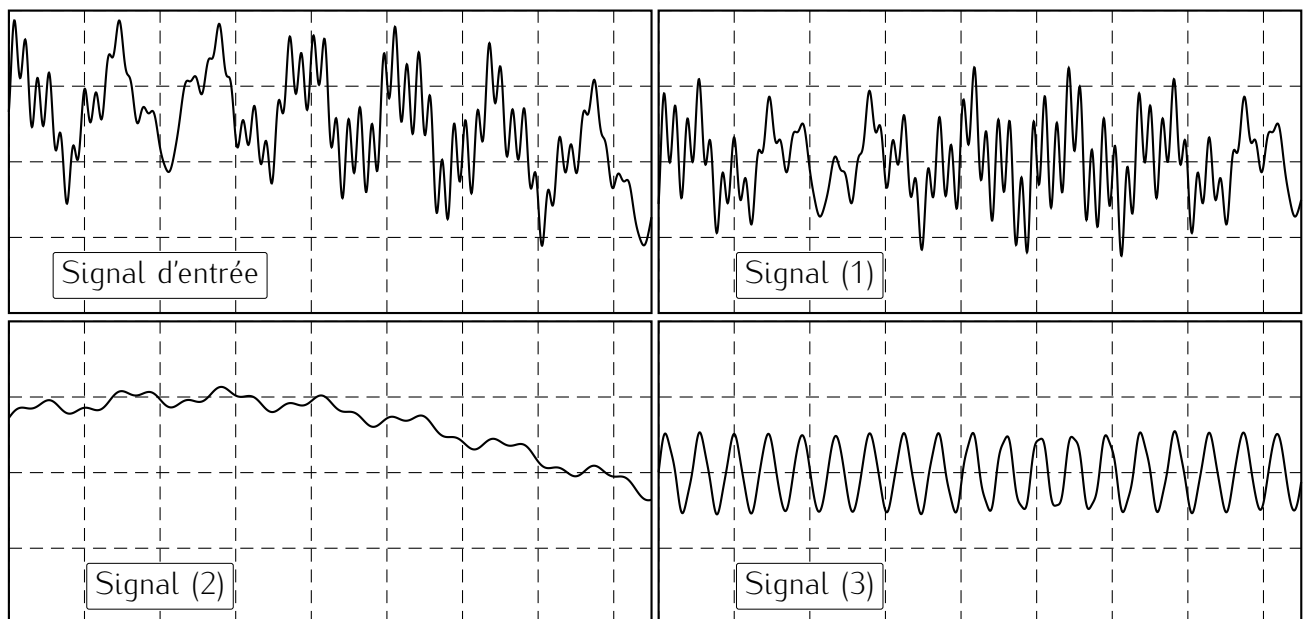
Q7 1. Parmi les filtres (a), (b) et (c) proposés ci-dessus, lequel correspond le mieux à l'utilisation que l'on veut en faire ? Justifier brièvement.

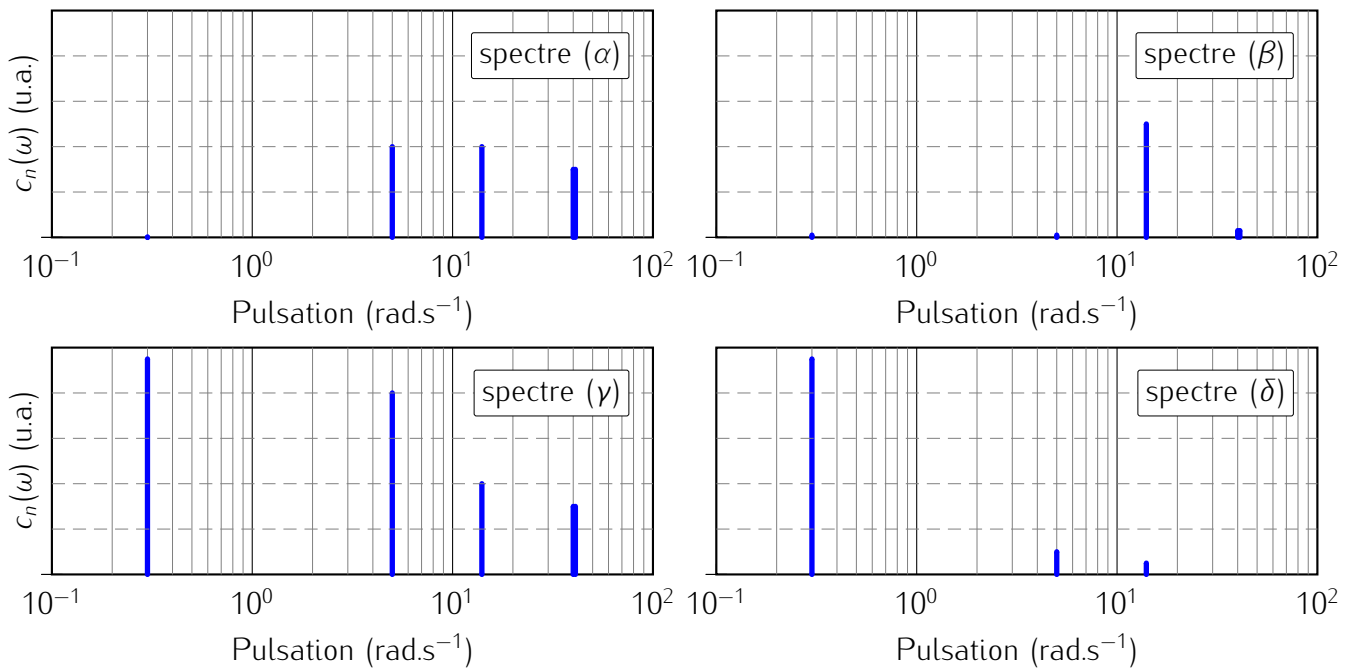
Q8 2. On considère le signal représenté ci-dessous à gauche (signal d'entrée) en entrée des filtres ainsi que les trois signaux de sorties obtenus dans le désordre.

On donne aussi les 4 spectres correspondants à ces signaux (à nouveau dans le désordre).

Indiquer, en expliquant brièvement votre choix, à quel signal (entrée, 1, 2 et 3) correspond quel spectre (α , β , γ et δ). On synthétisera les réponses dans un **tableau**.

Signal	Entrée	(1)	(2)	(3)
Spectre				
Filtre (Question suivante)	—			





- Q9 3. On considère toujours le signal d'entrée en entrée des filtres proposés. Indiquer, en expliquant brièvement votre choix, à quel signal de sortie (1, 2 et 3) correspond quel filtre (a, b et c). On ajoutera les réponses sur le **tableau** précédent.
- Q10 4. On reprend le filtre choisi à la première question. Déterminer l'ordre du filtre sachant que l'amplitude du signal à 0,01 Hz est atténuée d'un facteur 100 par rapport à celle d'un signal à 0,1 Hz. On pourra justifier en effectuant une étude asymptotique de la fonction de transfert suivante

$$\underline{H}_n(j\omega) = \frac{H_0 \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^n}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^n} = \frac{H_0 \left(j \frac{f}{f_c} \right)^n}{1 + \left(j \frac{f}{f_c} \right)^n}$$

correspondant à un filtre d'ordre n . On rappelle que pour le filtre choisi, on a $f_c = 1$ Hz.

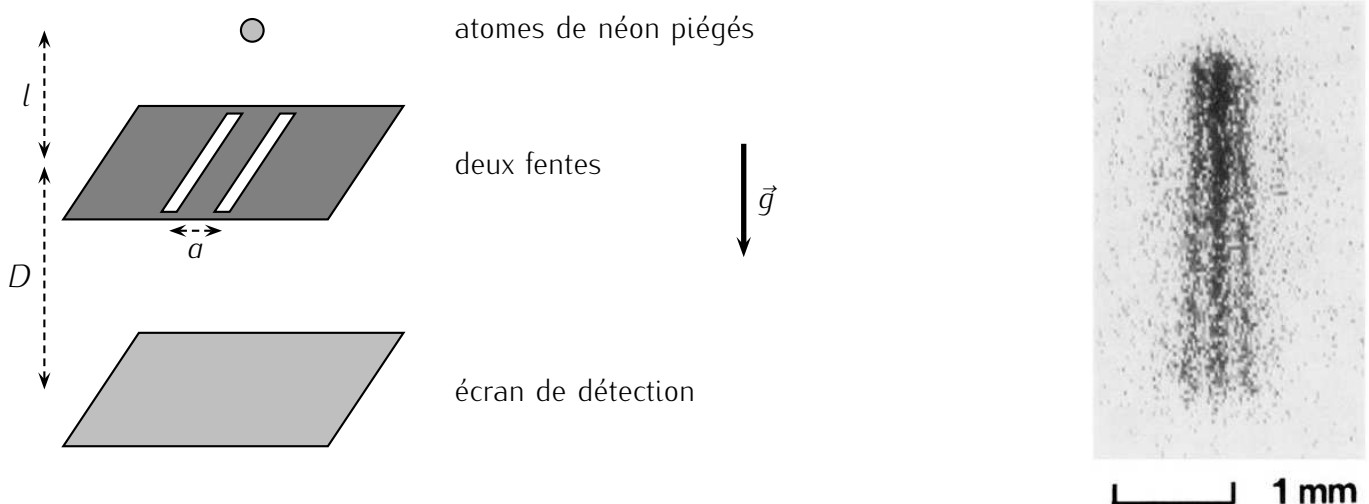
EXPÉRIENCE DE SHIMIZU ET TAKUMA

On donne :

- $h = 6,64 \cdot 10^{-34}$ J.s la constante de Planck,
- $\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹ le nombre d'Avogadro,
- $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C la charge d'un électron,
- $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg la masse de l'électron,
- $M = 20$ g.mol⁻¹ la masse molaire du néon,
- $g = 9,8$ m.s⁻² l'accélération de la pesanteur.

Des expériences d'interférences atomiques ont été réalisées avec succès en 1992 par l'équipe de Shimizu et Takuma. Le dispositif, schématisé ci-dessous, utilise des atomes de néon piégés et refroidis à une température de 2,5 mK de manière à minimiser leur agitation thermique moyenne. Ils sont portés dans un état métastable grâce à un laser à 598 nm, ils peuvent alors quitter le piège et tombent dans le champ de pesanteur.

Le piège est situé à une hauteur $l = 76$ mm au dessus de deux fentes séparées d'une distance $a = 6$ μm. La largeur d'une fente est de 2 μm. Un détecteur est placé à une distance $D = 113$ mm de la double fente et détecte les atomes de néon avec une résolution de l'ordre de 20 μm. L'ensemble du dispositif est disposé verticalement.



La figure d'interférence (ci-dessus à droite) obtenue en libérant les atomes du piège est constituée d'environ 6000 impacts atomiques. L'ensemble des impacts dessine des franges d'interférences dont la période spatiale appelée interfrange est égale à $i = 0,23$ mm (seul le tiers inférieur de la figure est à regarder, les deux tiers du haut ne sont pas pertinents car les fentes utilisées étaient abîmées.).

- Q11 1. En quoi cette expérience met-elle en évidence le caractère corpusculaire et le caractère ondulatoire de la matière ?
- Q12 2. En considérant une approche classique, montrez que la vitesse des atomes de néon au niveau des deux fentes est $v \simeq 1,2$ m.s⁻¹. On étudiera une chute libre sans vitesse initiale, et s'il vous plaît, utilisez une méthode énergétique.
- Q13 3. Pourquoi les atomes sont-ils refroidis à si basses températures ? Pour ces atomes, quel a été l'autre critère de choix qui influe dans le même sens ?
- Q14 4. En déduire la longueur d'onde de de Broglie λ_B associée à ces atomes.
- Q15 5. L'expression de l'interfrange i associée aux fentes d'Young est $i = \frac{\lambda D}{a}$. En déduire la longueur d'onde λ associée à la particule. Commenter.

ÉLECTRON DANS UN Puits DE POTENTIEL INFINI

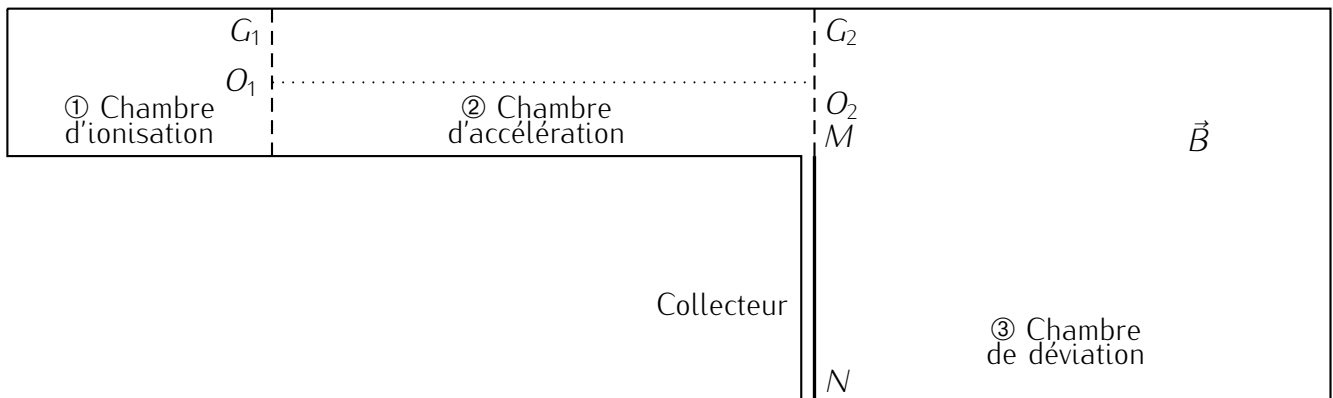
Un électron se trouve dans un puits de potentiel infini de largeur L . La plus grande longueur d'onde que cet électron puisse absorber (et émettre en retour) est de 600 nm.

- Q16 1. En utilisant l'analogie avec une corde de Melde fixée aux deux extrémités, quelles sont les longueurs d'onde permises pour l'électron dans le puits ?
- Q17 2. Rappeler le lien entre l'impulsion d'un quanton et sa longueur de De Broglie.
- Q18 3. En déduire l'expression des niveaux d'énergie E_n de l'électron en fonction de l'entier n et des constantes h , m_e et L .
- Q19 4. Pour passer d'un niveau d'énergie E_n à un niveau d'énergie E_m ($E_m > E_n$) l'électron absorbe un photon de fréquence ν . Quelle est le lien entre E_m , E_n et ν ?
5. Quels sont les deux niveaux d'énergie les plus proches ? Justifier qu'ils correspondent à la transition donnant la plus grande longueur d'onde émise ou absorbée ?
- Q20 6. Exprimer la longueur d'onde λ du photon émis ou absorbé en fonction de L .
- Q21 7. En déduire la largeur L du puits de potentiel.
- Q22 8. Faire l'application numérique.

Données : $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J · s.

SPECTROGRAPHIE DE MASSE

Un spectrographe de masse est constitué de plusieurs parties comme l'indique la figure ci-dessous :



- La chambre d'ionisation ① dans laquelle des atomes de potassium $^{A_1}_{19}\text{K}$ et $^{A_2}_{19}\text{K}$ de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions K^+ .
On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1 , la vitesse des ions est quasi nulle ;
- La chambre d'accélération ② dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2 ;
- La chambre de déviation ③ dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de direction perpendiculaire au plan de figure.
- Un collecteur d'ions constitué d'une plaque photosensible est disposé entre M et N .

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de figure.

I. Accélération des ions

- Q23 1. Quel doit être le signe de la différence de potentiel $V_{G_1} - V_{G_2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 ? Justifiez votre réponse.
- Q24 2. Établir les expressions des vitesses v_1 et v_2 des ions lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_1 , m_2 , e et $U = V_{G_1} - V_{G_2}$.

II. Déviation des ions

- Q25 1. Quel doit être le sens du champ magnétique $\vec{B}$ régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?
- Q26 2. Montrer que, dans la chambre de déviation, la trajectoire des ions est plane et que leur mouvement est uniforme.
- Q27 3. La trajectoire de chaque type d'ion est un cercle. Déterminer l'expression de leur rayon R_1 (respectivement R_2) en fonction de m_1 (respectivement m_2), e , U et B .
- Q28 4. En admettant que le rapport des masses des ions est égal au rapport de leurs nombres de masse A_1 et A_2 , exprimer le rapport $\frac{A_2}{A_1}$ en fonction des rayons R_1 et R_2 des trajectoires.
- Q29 5. Application numérique : on observe sur la plaque photosensible deux taches T_1 et T_2 correspondant aux impacts des ions de masses m_1 et m_2 respectivement et telles que $O_2T_1 = 103,0$ cm ; $O_2T_2 = 105,6$ cm. Déterminer A_2 sachant que $A_1 = 39$.

ONDES DE MATIÈRE

- Q1 1. D'une part, le fait d'observer des impacts ponctuels confirme le caractère corpusculaire. D'autre part, la présence de franges traduit un phénomène d'interférences qui ne peut s'expliquer que par le caractère ondulatoire de la lumière.
- Q2 2. On considère une chute libre sans vitesse initiale. Le système est un électron dans le référentiel galiléen du laboratoire, uniquement soumis à son poids. On prend un axe Oz vers le bas avec origine dans le piège. L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$\ddot{z} = g \Rightarrow v = \dot{z} = gt \Rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2$$

L'atome parcourt une distance l (jusqu'aux fentes) en $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$.

On a alors $v(t_1) = v_s = \sqrt{2gl}$.

A.N. $v_s = \sqrt{2 \times 9,8 \times 76.10^{-3}} = 1,2 \text{ m.s}^{-1}$

On pouvait aussi utiliser la conservation de l'énergie mécanique : $E_{m,i} = E_{m,f} \Rightarrow mgl + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_f^2$ et on en déduit le même résultat.

- Q3 3. Les atomes sont refroidis à si basses températures pour diminuer leur agitation thermique et ainsi leur vitesse moyenne et leur quantité de mouvement. Ainsi leur longueur d'onde de Broglie n'est pas trop petite et permet d'observer des interférences avec les tailles du dispositif. Nous verrons plus tard en thermodynamique que la vitesse moyenne est liée à la température par la relation : $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

L'autre critère peut-être la masse des atomes : il se peut qu'on ait choisi des atomes assez légers pour augmenter la longueur d'onde de Broglie.

- Q4 4. On utilise la relation $\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_{\text{néon}} v} = \frac{h N_A}{M_{\text{néon}} v}$

A.N. $\lambda_B = \frac{6,64.10^{-34} \times 6,0.10^{23}}{20.10^{-3} \times 1,2} = 1,7.10^{-8} \text{ m}$

- Q5 5. On calcule $\lambda = \frac{ai}{D}$.

A.N. $\lambda = \frac{6.10^{-6} \times 0,23.10^{-3}}{113.10^{-3}} = 1,2.10^{-8} \text{ m}$

On trouve un accord avec la longueur d'onde de de Broglie évaluée précédemment bien que cela ne coïncide pas parfaitement (cf remarque ci-dessous).

Remarque : La longueur d'onde de de Broglie a été évaluée avec la vitesse au niveau des deux fentes. Or les atomes continuent leur accélération et la longueur d'onde varie avec l'altitude.

Si on évalue la vitesse au niveau de l'écran, on trouve $v = \sqrt{2g(l+D)} = 1,9 \text{ m.s}^{-1}$. L'ordre de grandeur reste le même, on peut estimer que la longueur d'onde de de Broglie varie peu. Par contre, si on demandait de calculer la valeur précise de l'interfrange, il faudrait prendre en compte toute la variation de λ_B au cours du mouvement.

PUITS QUANTIQUE

1. Par analogie avec une corde de Melde fixée aux deux extrémités, les états stationnaires vérifient : $L = \frac{n\lambda_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ d'où : $\lambda_n = \frac{2L}{n}$
2. La relation de De Broglie s'écrit : $p = \frac{h}{\lambda}$

3. On a : $p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{hn}{2L}$

L'énergie cinétique de l'électron vaut : $E_n = \frac{p_n^2}{2m_e}$

Donc : $E_n = \frac{1}{2m_e} \left(\frac{hn}{2L} \right)^2 = \frac{h^2 n^2}{8m_e L^2}$

4. Lors d'une transition, l'énergie du photon vérifie : $E_m - E_n = h\nu$

5. Les niveaux d'énergie sont proportionnels à n^2 , donc l'écart : $E_{n+1} - E_n$ augmente avec n .

Ainsi, les niveaux les plus proches sont $n = 1$ et $n = 2$.

Comme : $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_m - E_n}$ la plus grande longueur d'onde correspond à la plus petite différence d'énergie, donc à la transition $2 \rightarrow 1$.

6. On calcule : $E_2 - E_1 = \frac{h^2}{8m_e L^2} (4 - 1) = \frac{3h^2}{8m_e L^2}$

Donc : $\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{hc}{\frac{3h^2}{8m_e L^2}} = \frac{8m_e c L^2}{3h}$

7. On isole L : $L^2 = \frac{3h\lambda}{8m_e c} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8m_e c}}$

8. Avec $\lambda = 600 \text{ nm} = 6,0 \times 10^{-7} \text{ m}$:

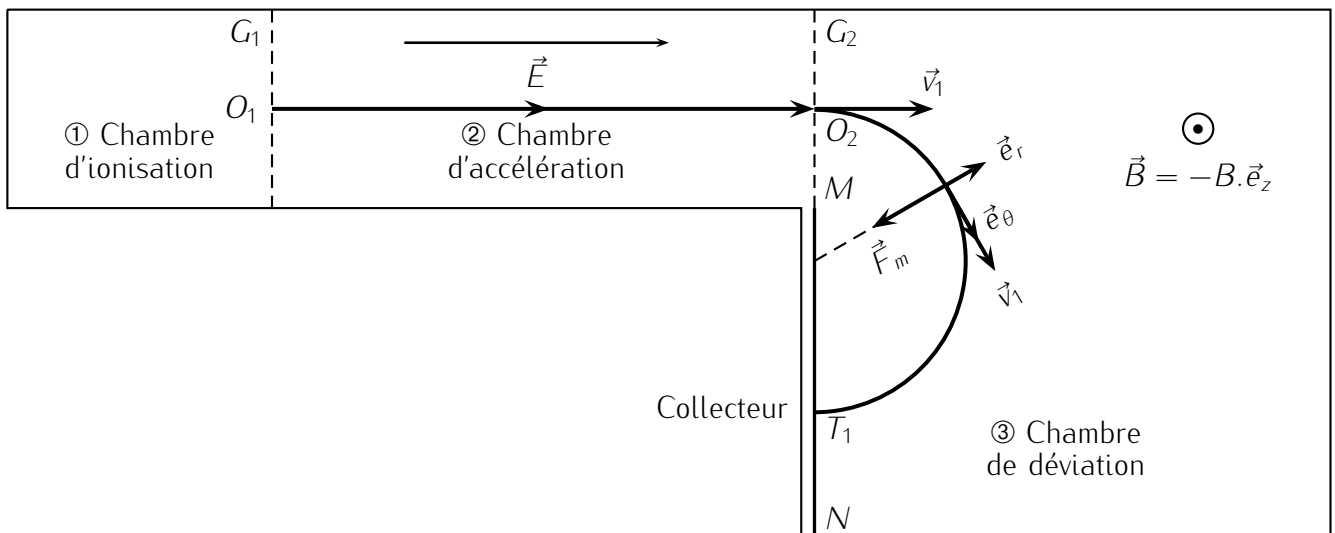
$$L = \sqrt{\frac{3 \times 6,63 \times 10^{-34} \times 6,0 \times 10^{-7}}{8 \times 9,11 \times 10^{-31} \times 3,0 \times 10^8}}$$

Donc : $L^2 \approx 5,46 \times 10^{-19}$

$L \approx 7,4 \times 10^{-10} \text{ m}$

Résultat final : $L \approx 0,74 \text{ nm}$

SPECTROGRAPHIE DE MASSE



I. Accélération des ions

1. Les ions étant de charge $q = e$ positive, le champ électrostatique dans la chambre d'accélération ② doit être orienté de gauche à droite sur la figure, c'est à dire de G_1 vers G_2 .

Or le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants, on doit donc avoir $V_{G_2} < V_{G_1}$ d'où $U = V_{G_1} - V_{G_2} > 0$.

Q6

Vous verrez plus tard que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$.

2. Entre O_1 et O_2 , la seule force appliquée à la particule est $\vec{F}_e = e \cdot \vec{E}$ (on néglige le poids) avec $\vec{E} = \frac{U}{O_1 O_2} \cdot \vec{e}_x$ le champ électrostatique produit entre les grilles G_1 et G_2 .

Par application du théorème de l'énergie cinétique sur le système { particule } dans le référentiel local considéré galiléen, on peut écrire $\Delta E_c = W(\vec{F}_e) = e \vec{E} \cdot \overrightarrow{O_1 O_2}$ (cas particulier d'une force constante $e \vec{E}$ dont le point d'application se déplace de O_1 à O_2).

Pour obtenir la vitesse numérique, pensez à une méthode énergétique

Pour la particule de masse m_1 , on a ainsi $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = e E \cdot \vec{e}_x \cdot O_1 O_2 \cdot \vec{e}_x = e \frac{U}{O_1 O_2} \cdot O_1 O_2 = e U$. Comme on suppose de plus que la vitesse v_0 en O_1 est négligeable devant v_1 celle en G_2 , on en

Q7

déduit $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}$ et de même, $v_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$

II. Déviation des ions

1. Pour que les ions puissent atteindre le collecteur la force magnétique doit être orientée vers la plaque quand la particule arrive dans en O_2 .

Or, la particule n'étant soumise qu'à la force d'origine magnétique $\vec{F}_m = e \vec{v} \wedge \vec{B}$, l'orientation du produit vectoriel implique $\vec{B}$ normal au plan de la figure et dirigé vers le lecteur.

Q8

Règle de la main droite

2. La force $\vec{F}_m$ reste normale à $\vec{B}$ qui est lui même perpendiculaire au plan de la figure. De plus, $\vec{v}$ est dans le plan de la figure. On aura donc affaire à un mouvement plan.

F_m dans le plan implique $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = Cte$, il faut évoquer les CI pour démontrer $\dot{z} = Cte$ et donc un mouvement plan.

Par ailleurs, $\vec{F}_m$ ne travaillant pas car normale à $\vec{v}$ à tout instant, le théorème de la puissance cinétique $\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_m) = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$ c'est à dire que l'énergie mécanique des particule est constante d'où une vitesse constante et un mouvement à vitesse constante (uniforme).

Q9

Pensez au théorème de la puissance cinétique

3. En travaillant dans le référentiel local galiléen et le système de coordonnées polaires $Oxyz$ (Cf figure), par application du PFD sur la particule de masse m_1 en mouvement circulaire uniforme

$$m_1 \vec{a} = e \vec{v} \wedge \vec{B} = e \begin{vmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{vmatrix} \Rightarrow -m_1 \frac{v^2}{R_1} \cdot \vec{e}_r = -e v_1 B \vec{e}_r \Rightarrow R_1 = \frac{m_1 v_1}{e B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_1 U}{e}}$$

Q10

et de même, pour la particule de masse m_2 , $R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_2 U}{e}}$

Attention, ici $\vec{B} = -B \cdot \vec{e}_z$

Q11 4. Si $\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2}$, on peut écrire $\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$ d'où $\boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2}}$.

Q12 5. Application numérique : si $O_2 T_1 = 2R_1$ et $O T_2 = 2R_2$ on calcule alors $\boxed{A_2 = \frac{OT_2^2}{OT_1^2} \cdot A_1 \simeq 41.}$