

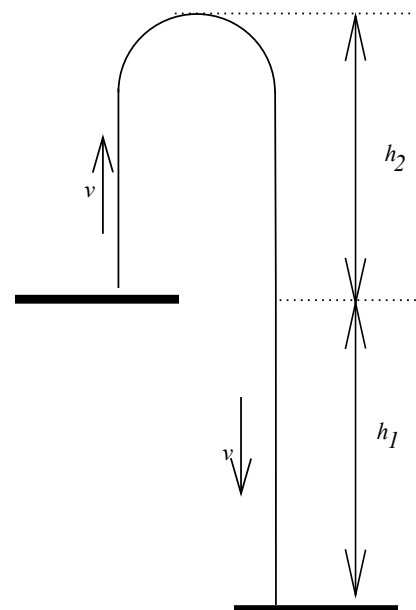
CHAIN FOUNTAIN

Dans ce problème, nous souhaitons interpréter la deuxième expérience de cette vidéo.

Lorsqu'elle évolue en régime stationnaire, la chaîne possède une vitesse de norme v . On considérera que le rayon r est suffisamment faible et que v est suffisamment grande pour que l'on puisse négliger le poids de la chaîne dans la partie courbée de la trajectoire.

On considère une chaîne de billes au repos dans un b cher à une hauteur h_1 du sol. Si une extrémité de la chaîne est tirée au-dessus du bord du b cher, la chaîne coule spontanément en dehors du b cher sous l'effet de la gravité. Le plus surprenant est que les billes ne sont pas seulement tirées en dehors du b cher mais qu'elles forment une fontaine atteignant une hauteur h_2 au-dessus de celle-ci. On choisit la modélisation suivante : la chaîne possède une masse par unité de longueur notée λ . Un tas est posé sur une table horizontale à une hauteur h_1 au-dessus du sol et la chaîne coule le long d'une trajectoire qui, initialement, est verticale jusqu'à une hauteur $h_2 - r$, puis décrit un demi-cercle de rayon r et finalement tombe verticalement d'une hauteur $h_1 + h_2 - r$ pour finir au repos sur un second tas.

On appelle T_C la tension de la chaîne dans la partie courb e, T_T la tension de chaîne juste au-dessus de la table et T_F la tension dans la chaîne juste au-dessus du sol. On note g l'accélération de la pesanteur.



Partie I : première modélisation

1. En étudiant un morceau de chaîne bien choisi, établir une relation entre T_T et T_C , faisant intervenir h_2 et λ .
2. De la même façon, établir une relation entre T_F et T_C .
3. On cherche une expression pour T_C , pour cela, on considère un petit morceau de chaîne, de longueur dl dans la partie circulaire de la trajectoire. Faire un schéma et représenter les forces de tension.
4. Quel système de coordonnées est-il le plus adaptée à l'étude ? Appliquer la seconde loi de Newton au système étudié et montrer que $T_C = \lambda v^2$.
5. Afin de trouver une expression pour T_T , on peut effectuer un bilan de quantité de mouvement sur un petit bout de chaîne au voisinage de la table. Entre les instants t et $t + dt$, quelle masse de chaîne a été mise en mouvement et soulevée de la table ?
6. Quelle a été l'augmentation de quantité de mouvement dp de cette masse ?
7. En déduire que $T_T = \lambda v^2$.
8. Quelle valeur de h_2 obtient-on en rassemblant les résultats précédents ? Est-ce en accord avec l'expérience ?

Partie II : intermède énergétique

9. Dans l'hypothèse où la chaîne ne possède pas de résistance en compression, quelle est la valeur de T_F ? En déduire l'expression de v en fonction de h_1 .
10. Considérons un petit morceau de chaîne de longueur initiale dl . Quelles sont ses énergies potentielle et cinétique lorsqu'il est au repos dans le b cher ?
11. Quelles sont ses énergies potentielle et cinétique juste avant de toucher le sol ? L'évolution de la chaîne est-elle conservative ?
12. Que vaut l'énergie dissipée lors de la chute ? Quel lien peut-on faire entre l'énergie potentielle initiale et l'énergie dissipée ? Avez-vous déjà rencontré cette relation dans un autre domaine de la physique ?

Partie III : seconde modélisation

D'après les expressions trouvées dans la partie I, on remarque que pour obtenir $h_2 > 0$, il faut $T_T < \lambda v^2$. On peut alors se demander si la chaîne ressent effectivement toute la tension du morceau qu'elle est en train de soulever. La seule option possible serait que l'élément de chaîne qui est soulevé entre les instants t et $t + dt$ serait poussé par une force verticale de la part du reste du tas. On choisit alors d'introduire une telle force, notée R .

Q13

13. Appliquer la seconde loi de Newton à la portion de chaîne qui est soulevée entre t et $t + dt$.

Q14

14. Justifier qu'on puisse écrire $R = \alpha \lambda v^2$ et $T_F = \beta \lambda v^2$ où α et β sont des constantes sans dimension.

Q15

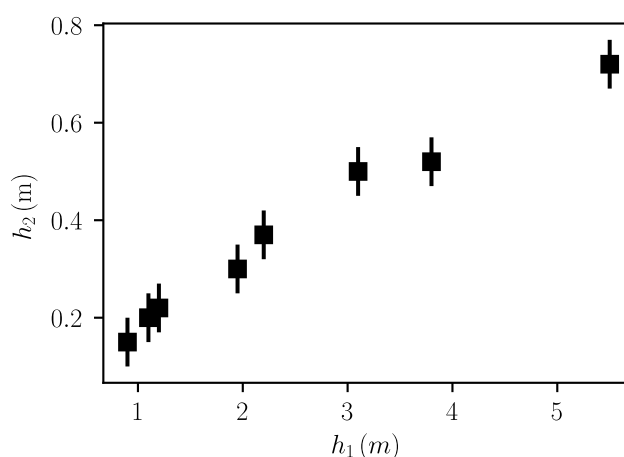
15. Exprimer le rapport $\frac{h_1}{h_2}$ en fonction de α et β .

Q16

16. De même, exprimer la vitesse v en fonction de α et β .

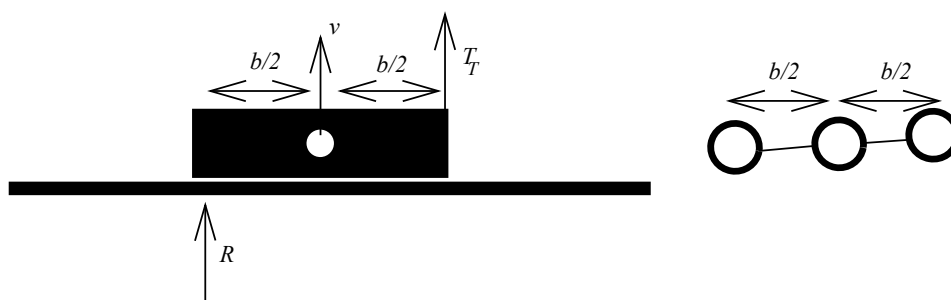
Q17

17. Sur la figure ci-dessous on a tracé expérimentalement la hauteur h_2 en fonction de la hauteur h_1 . Les résultats précédents sont-ils en accord avec l'expérience (Résultats issus de Biggins JS, Warner M. 2014 Proc. R. Soc. A470 : 20130689).



Partie IV : origine de la force R

Intéressons-nous aux origines physiques de la force R responsable de l'effet de fontaine. Pour cela, on choisit de représenter la chaîne comme un ensemble de petit cylindre de longueur b et de masse m liés les uns aux autres par un fil idéal sans masse.



Chacun de ces cylindres est mis en mouvement lorsque le cylindre précédent exerce une force verticale à l'une de ses extrémités. On représente cette situation sur la figure ci-dessus. On remarque que la force de traction T_T entraîne une rotation du cylindre autour de son centre d'inertie, et comme ce dernier ne peut pas pénétrer dans le sol une force R est exercée sur l'autre extrémité. On notera J le moment d'inertie du cylindre autour de l'axe passant par son centre d'inertie et perpendiculaire au plan d'étude, et ω sa vitesse de rotation autour de cet axe.

Q18

18. Montrer que les lois de la dynamique donnent :

$$\begin{cases} T_T + R = ma \\ T_T b - Rb = J\omega \end{cases}$$

Q19

19. Etablir la relation liant a et ω .

Q20

20. On rappelle que, dans le cadre de ce second modèle, $a = \lambda v^2$. Montrer que

$$R = \left(1 - \frac{J}{mb^2}\right) \frac{1}{2} \lambda v^2$$

On peut estimer le moment d'inertie J pour une chaîne de billes, en assimilant le cylindre précédent à trois billes successives. On trouve alors $J = \frac{1}{6}mb^2$.

Q21

21. Dans l'hypothèse où β est négligeable, que vaut le rapport $\frac{h_2}{h_1}$? Comparer aux résultats expérimentaux.