

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE PARIS-SACLAY CONCOURS D'ADMISSION 2025

VENDREDI 18 AVRIL 2025

08h00-13h00

FILIÈRE PC - Épreuve n °9
PHYSIQUE-CHIMIE (LS)

Durée : 5 heures

L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Les parties relatives à la chimie et à la physique doivent être rédigées sur des copies distinctes, en tête desquelles doit être mentionné respectivement "Physique-Chimie / Chimie" et "Physique-Chimie / Physique".

Pour chacune de ces parties, les copies doivent être numérotées depuis 1.

Cette épreuve comprend deux parties indépendantes. La première concerne la physique et propose une étude d'un canon magnétique. La seconde, dédiée à la chimie, s'intéresse au soudage des aciers.

→ Le barème est réparti à poids égal sur les parties physique et chimie. Il est conseillé de ne pas consacrer plus de deux heures et trente minutes à chacune d'elles.

→ Les résultats des applications numériques seront donnés avec la précision qu'un calcul à la main permet, sans excéder deux chiffres significatifs. Les ordres de grandeur, seront donnés avec un chiffre significatif.

→ Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.

Partie Physique

Étude d'un canon magnétique

Nous nous proposons d'étudier un principe de canon magnétique ¹. Un tel dispositif permet de convertir de l'énergie interaction magnétique en énergie cinétique. Celui auquel nous nous intéressons est très élémentaire. Il est constitué d'un percuteur ferromagnétique et d'un aimant adossé à une chaîne de billes ferromagnétiques. Les premières recherches concernant la propulsion magnétique débutèrent à la fin du dix-neuvième siècle. Des dispositifs plus évolués, équipés de

bobines, sont encore à l'étude en vue de réaliser des lanceurs électromagnétiques qui intéressent, en particulier, l'armée et l'aérospatiale.

Cette étude comprend deux parties indépendantes. La première s'intéresse à caractériser le principe du canon. La seconde étudie la transmission, le long de la chaîne de billes, de l'onde mécanique produite par l'impact du percuteur contre l'aimant.

→ Les réponses doivent être rédigées de façon claire, concise et lisible. → En particulier lorsqu'elles relèvent de considérations qualitatives, elles devront être systématiquement argumentées.

Présentation de l'étude.

Nous nous intéressons à un dispositif d'éjection de projectile (que nous appellerons un canon) dont l'élément moteur est un aimant. Ce dernier est une bille placée au point O d'un guide rectiligne² horizontal orienté par l'axe (Ox). Nous l'identifions par le label (o). On dispose, sur ce guide, N autres billes ferromagnétiques mais non aimantées³, côte à côte. Elles portent les labels (1) à (N). La bille (1) est en contact avec l'aimant (o). Enfin, une bille ferromagnétique, portant le label (i) et que nous appellerons impacteur, est lancée depuis une abscisse $x \rightarrow -\infty$ en direction de l'aimant (o), le long du rail de guidage et selon la vitesse initiale $\vec{v}_{i,\infty} = v_{i,\infty} \vec{e}_x$ ($v_{i,\infty} > 0$). Le choc de l'impacteur sur l'aimant (o) produit une onde mécanique le long de la chaîne de billes qui conduit à l'éjection de la bille (N) (les $N+1$ autres billes restant immobiles et jointives après le choc de l'impacteur). Ce phénomène est illustré sur la figure (1). Afin d'éviter le recul de la chaîne de billes lors de la phase d'approche de l'impacteur, une butée (non représentée sur la figure) interdit le mouvement vers l'arrière de l'aimant (o).

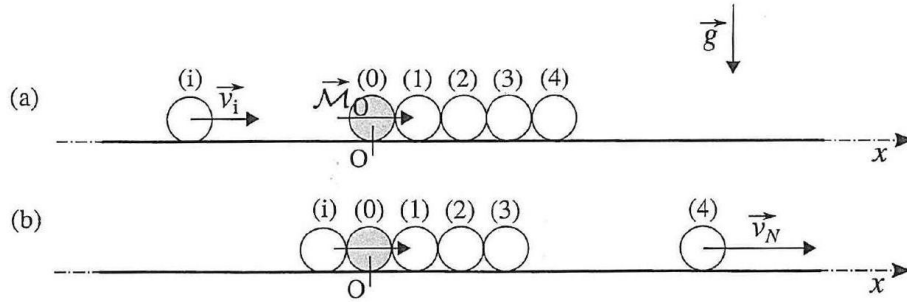


Figure 1 - Illustration du principe du canon magnétique étudié, dans la cas où $N = 4$: Une bille (i) ferromagnétique est attirée par une bille aimantée (o) portant le moment magnétique permanent $\vec{M}_0$. Sous l'effet du choc produit, la bille (N) est éjectée de la chaîne : (a) Situation antérieure au choc de l'impacteur

¹ Que l'on appelle parfois canon de GAUSS.

² Une rainure, par exemple.

³ Ces billes ne portent donc pas de moment magnétique permanent mais peuvent acquérir un moment magnétique induit. Elles sont susceptibles d'être attirées par un aimant.

(i) contre la bille (o) ; (b) Situation postérieure à l'éjection de la bille (N) (c'est-à-dire de la rupture de son contact avec la chaîne). L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ n'intervient que pour assurer le maintien du contact des billes avec leur guide (horizontal).

Notation, données et formulaire.

Toutes les billes (dont l'aimant) possèdent les mêmes propriétés mécaniques. L'aimant ne diffère des autres billes que par le fait qu'il possède une aimantation permanente. Les propriétés physiques de nature intensive des billes sont homogènes sur leur volume.

- Masse volumique (bille) : $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Module d'élasticité longitudinal (ou module de Young) (bille) : $Y = 200 \text{ GPa}$
- Diamètre d'une bille : $a = 1 \text{ cm}$
- Volume d'une bille : $V = 0,5 \text{ cm}^3$
- Masse d'une bille : $m = 4g$
- Abscisse du centre d'une bille (n) ($n = 0, 1, \dots, N$), comptée depuis le centre de la bille (o) : x_n
- Abscisse du centre de l'impacteur : x_i ($x_i \in]-\infty, -a]$)
- Vitesse initiale de l'impacteur (pour $x_i \rightarrow -\infty$) : $v_{i,\infty} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique relative (billes ferromagnétiques) : $\mu_r \sim 10^3$
- Moment magnétique (permanent) de la bille aimantée (o) : $\vec{M}_0 = M_0 \vec{e}_x$ où $M_0 = 0,5 \text{ A} \cdot \text{m}^2$
- Moment magnétique (induit) d'une bille ferromagnétique (n) ($n = i, 1, 2, \dots, N$) : $\vec{M}_n = M_n \vec{e}_x$
- Champ magnétique créé par la bille aimantée (o) (supposée uniformément magnétisée), en un point d'abscisse x de l'axe (Ox) extérieur à la bille :

$$\vec{B}_0(x) = B_0(x) \vec{e}_x \text{ où } B_0(x) = B^* \frac{a^3}{|x^3|}; B^* = \frac{\mu_0 M_0}{2\pi a^3}; |x| \geq a/2 \quad (1)$$

- Moment magnétique $\vec{M}_n$ ($n \neq 0$), acquis par une bille (n) soumise au champ magnétique $\vec{B}_0$ (considéré comme étant uniforme sur le volume de la bille (n) produit par l'aimant (o) :

$$\vec{M}_n = \beta V \frac{\vec{B}_0(x_n)}{\mu_0} \text{ où } \beta = 3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \quad (2)$$

- Énergie d'interaction magnétique entre la bille aimantée (o) et une bille (n) ($n = i, 1, 2, \dots, N$) :

$$E_{0n} = -\vec{M}_n \cdot \vec{B}_0(x_n) \quad (3)$$

Cadre d'hypothèses adopté.

- Seules les interactions magnétiques entre la bille aimantée (o) et les autres billes sont considérées ;
- Le moment magnétique permanent de la bille aimantée (bille (o)) est supposé ne pas être influencé par la présence des autres billes, et resté porté par l'axe (Ox) ;
- La perméabilité magnétique relative μ_r des billes ferromagnétiques est supposée rester constante.
- Le champ magnétique produit par la bille aimantée (bille (o)) est considéré comme étant uniforme sur le volume d'une bille (n)($n \neq 0$). Nous le prendrons égal à celui régnant au centre de cette bille, c'est-à-dire $\vec{B}_0(x_n)$;
- Les conséquences des éventuels courants induits au sein des billes ne sont pas prises en compte.
- Aucune source de dissipation de l'énergie mécanique et magnétique autre que celle(s) explicitement mentionnée(s) n'est prise en compte.

1 Caractérisation du canon magnétique.

Il s'agit de relier les conditions d'éjection de la bille (N) aux conditions de choc de l'impacteur (i) contre la bille aimantée (o).

1. Nous considérons que le roulement d'une bille (dans cette étude, l'impacteur ou la bille éjectée) le long du guide s'effectue sans glissement. Ses vitesses de translation $\vec{v} = v\vec{e}_x$ et de rotation (roulement) sont alors synchronisées. Dans ce cas, son énergie cinétique prend la forme suivante :
 $E_c = \frac{1}{2}(\alpha \times m)v^2$ où $\alpha = \text{Cste} > 0$
Par ailleurs, nous admettons que, dans ces conditions, le roulement s'effectue sans dissipation d'énergie mécanique.

Proposer un argument qualitatif justifiant que $\alpha > 1$.

Dans la suite nous adopterons la valeur $\alpha = 7/5$.

2. Attribuer une signification physique au paramètre B^* figurant dans l'équation (1). Calculer sa valeur.
3. Nous considérons la bille aimantée (o) et une bille ferromagnétique d'abscisse $x(|x| \geq a)$. Pour cette étude, x est une variable continue. Exprimer leur énergie d'interaction $E_0(x)$ en fonction de E_{01} et $X = x/a$.
4. Représenter l'allure graphique de la dépendance de l'énergie d'interaction $E_0(x)$ vis-à-vis de X . Indiquer les propriétés de cette interaction que ce tracé met en évidence.
5. Calculer la valeur de l'énergie d'interaction magnétique E_{01} et celle de l'énergie cinétique initiale $E_{c,i,\infty}$ de l'impacteur. Commenter ce résultat.
6. Nous nous plaçons dès à présent dans le cas où $E_{c,i,\infty} \ll |E_{01}|$. Exprimer, en fonction de E_{01} et αm , la vitesse $v_{i,c}$ de l'impacteur immédiatement avant son entrée en contact avec la bille aimantée (o). Calculer sa valeur.

7. Nous supposons que la chaîne de billes transmet à la dernière bille (bille (N)) toute l'énergie cinétique de translation que l'impacteur possédait immédiatement avant son choc (soit, $(1/2) m v_{i,c}^2$) (sa rotation ne contribue pas à la création d'une onde mécanique dans la chaîne de billes) ⁴.

4 L'énergie cinétique de rotation est dissipée par frottement au cours de la phase de choc.

Exprimer, en fonction de E_{01} et α , l'énergie cinétique $E_{c,N,0}$ de la bille (N) immédiatement après sa perte de contact avec la bille ($N - 1$) qui la précède.

8. Exprimer, en fonction de E_{01} et N , la hauteur Δ_N de la barrière d'énergie potentielle que la bille (N) doit franchir pour être libérée de l'attraction qu'exerce sur elle la bille (o). Établir la condition, portant sur N , assurant que la bille (N) peut la franchir.

9. Nous supposons que la condition établie en réponse à la question (8) est satisfaite et que $\Delta_N \ll |E_{01}|$. Par ailleurs, nous considérons que, dès la perte de contact de la bille (N) avec la bille ($N - 1$), la condition de roulement sans glissement est aussitôt satisfaite (se reporter à la question (1)).

Exprimer, en fonction de $v_{i,c}$ (définie dans la question (6)) et α , la vitesse $v_{N,\infty}$ acquise par la bille (N) lorsqu'elle ne subit plus l'attraction de la bille (o). Calculer la valeur de $v_{N,\infty}$.

10. En vue de définir des conditions de fonctionnement du canon adaptées au besoin, indiquer comment varie, avec le diamètre a des billes, d'une part la vitesse $v_{N,\infty}$, d'autre part l'énergie cinétique $E_{c,N,\infty}$ correspondante.

11. Le guide est maintenant circulaire, de rayon de courbure grand devant la longueur de la chaîne de billes. Nous supposons encore que $E_{c,i,\infty} \ll |E_{01}|$ et $\Delta_N \ll |E_{01}|$. Sans effectuer aucun calcul, par une simple analyse qualitative appuyée sur les résultats précédemment établis, commenter l'évolution du système de billes après l'éjection de la bille (N) induit par le choc de l'impacteur (i) contre la bille aimantée (o). Préciser, en particulier, si l'on peut s'attendre à observer un effet "amplificateur" de vitesse. Une argumentation est attendue.

2 Étude de la propagation de l'onde mécanique le long de la chaîne de billes.

Le choc de l'impacteur (i) contre la bille aimantée (o) génère une onde mécanique longitudinale qui se propage le long de la chaîne rectiligne (horizontale) de billes de masse m et de diamètre a , en contact (se reporter à la présentation de l'étude). Il s'agit d'étudier les propriétés de cette onde.

La figure (2) représente trois billes voisines ($n - 1$), (n) et ($n + 1$) de cette chaîne. Nous notons $x_n(t)$ l'abscisse du centre de la n -ième bille, comptée depuis celui de la première bille.

Nous supposons que, lors de la propagation de l'onde, aucun contact entre les billes ne se trouve rompu. Par ailleurs, nous ne considérons pas l'éventuel roulement des billes sur leur rail de guidage. Ainsi, ces dernières sont supposées se déplacer uniquement en translation (ce déplacement est une conséquence de

leur déformation). Enfin, aucun phénomène dissipatif n'est pris en compte.

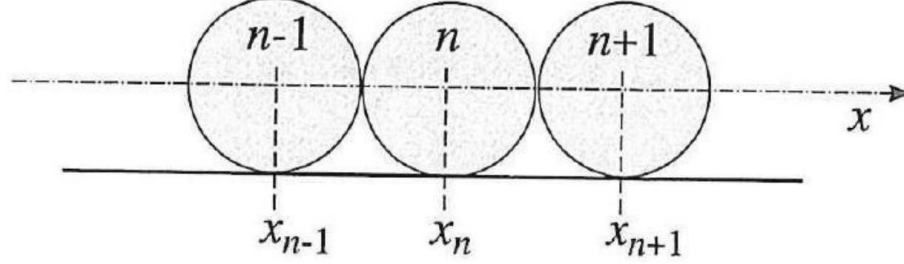


Figure 2 - Segment de la chaîne formé de trois billes consécutives $(n-1)$, (n) et $(n+1)$.

2.1 Modèle du contact de Hertz.

La force de contact, de nature élastique, dite force de HERTZ, que la bille (n) exerce sur la bille $(n+1)$ (se reporter à la figure (2)) s'exprime selon la relation suivante :

$$\vec{F}_{n/n+1} = \begin{cases} F_{n/n+1} \vec{e}_x \text{ où } F_{n/n+1} = q \delta_{n+1}^{3/2} \text{ et } \delta_{n+1} = a - (x_{n+1} - x_n), \text{ si } \delta_n \geq 0 \\ \vec{0}, \text{ sinon} \end{cases} \quad (5)$$

La constante positive q dépend ⁵ du diamètre a des billes et du module d'élasticité longitudinal (ou module de Young ⁶ Y du matériau les constituant. La variable δ_{n+1} sera appelée recouvrement des billes (n) et $(n+1)$.

12. Sur la base de la loi de HOOKE, proposer un argument qualitatif justifiant que l'exposant affecté à δ_{n+1} , dans l'expression de la force de HERTZ (équation (5)), doit effectivement être supérieur à l'unité.

13. À partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer la forme de la dépendance de q vis-à-vis de Y et a . Dans la suite, nous fixerons arbitrairement à 1 la valeur du préfacteur numérique que cette méthode ne permet pas de déterminer. Calculer la valeur de q .

14. Une bille entre en contact, animée de la vitesse v_0 , avec une autre bille dont le centre est

⁵ Cette constante dépend également du coefficient de Poisson (paramètre sans dimension) du matériau. Nous n'en tiendrons pas compte ici.

⁶ Il s'agit de la grandeur qui intervient dans la loi de Hooke. maintenu fixe. Exprimer, en fonction de leur masse m , de q et de v_0 , le recouvrement maximal δ_M atteint au cours de leur choc. Estimer l'ordre de grandeur de sa valeur pour $v_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

15. Estimer l'ordre de grandeur de la valeur de la force de Hertz F_M correspondant à δ_M .

16. Le module de la force d'interaction magnétique entre la bille aimantée (o) et une bille ferromagnétique en contact avec elle (se reporter au texte présentant

cette étude) avoisine dix newtons. Semble-t-il justifié de ne pas tenir compte de cette interaction lors de l'étude de la propagation de l'onde ?

2.2 Équation d'onde.

Nous nous intéressons à la propagation de l'onde mécanique le long de la chaîne de billes. Dans la situation de référence, c'est-à-dire en l'absence d'onde, toutes les billes constituant la chaîne sont immobiles, en contact, et leurs centres sont situés aux abscisses $x_n^0 = na$. Nous posons $K = qa^{1/2}$ et $u_n = x_n - x_n^0$. Rappelons que nous supposons que, lors de la propagation de l'onde, aucun contact entre les billes ne se trouve rompu.

17. La chaîne de billes est un milieu continu, considéré comme unidimensionnel, à travers lequel l'onde mécanique se propage. Sa propagation doit alors être décrite par un champ de déplacement continu $u(x, t) = MM'$ où M est un point d'abscisse x de l'axe de la chaîne, dans la situation de référence. Le point M' est son transformé, conséquence du passage de l'onde.

Indiquer à quelle condition (ou dans quelle limite) il devient acceptable de décrire la propagation de l'onde de façon discrète, par l'intermédiaire de la suite des abscisses $x_n(t)$.

Toute la suite de cette étude se situe dans ce cadre.

18. Établir que le comportement dynamique de la chaîne de billes est alors décrit par l'équation suivante (nous supposons que l'indice n ne désigne ni la première bille, ni de la dernière) :

$$a^{1/2}\ddot{u}_n = \Omega_0^2 \left\{ (u_{n-1} - u_n)^{3/2} - (u_n - u_{n+1})^{3/2} \right\} \quad (6)$$

Le paramètre Ω_0^2 est une constante dont on donnera l'expression en fonction de K et m .

Tout en restant dans le cadre défini dans la question (17), nous adoptons une représentation continue du champ de déplacement. Nous le caractérisons par la fonction $u = u(x, t)$ (en reprenant la notation introduite dans la question (17)).

19. Établir que $\partial u / \partial x \leq 0$.

20. Effectuer un développement de TAYLOR du second membre de l'équation différentielle (6), jusqu'à l'ordre deux vis-à-vis du pas spatial a de discrétisation. Établir qu'il conduit à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{1/2} \quad (7)$$

Le paramètre c_0 est une constante (choisie positive) que l'on exprimera en fonction de Ω_0 et a , et dont on indiquera la dimension. Au cours de ce calcul nous supposons que la dérivée partielle $\partial u / \partial x$ ne s'annule pas.

Présenter les particularités de l'équation (7) en comparaison à une équation de D'ALEMBERT.

2.3 Propagation d'une onde localisée.

Nous attendons que le choc subi par la première bille génère une perturbation qui se propage le long de la chaîne de billes sous la forme d'un motif localisé spatialement et dont la forme reste stable. Une telle onde s'appelle un soliton. Pour décrire de façon satisfaisante sa propagation il s'avère nécessaire de prendre en compte des termes d'ordres supérieurs dans le développement de TAYLOR du second membre de l'équation différentielle (6).

La fonction $u = u(x, t)$ présentant les propriétés suivantes est solution de l'équation aux dérivées partielles que l'on obtiendrait, en remplacement de l'équation (7) :

$$\begin{cases} u(x, t) = F(\theta) & \text{où } \theta = \frac{x-ct}{L_0}; L_0 = \sqrt{\frac{5}{2}}a; c = \sqrt{\frac{24}{5\pi}}A^{1/4}c_{\text{son}}; c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = G(\theta) & \text{où } G(\theta) = -A(\sin \theta)^4; A = \text{Cste} > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Le paramètre c_{son} représente la célérité d'une onde sonore (onde mécanique longitudinale) se propageant dans un milieu infini de masse volumique ρ et de module de Young Y . Par ailleurs, la fonction u est proportionnelle à A .

21. Rappeler le sens physique de la vitesse de phase d'une onde (un schéma peut être éclairant). Exprimer la vitesse de phase v_ϕ de cette onde.

22. Commenter la dépendance, vis-à-vis de A , de la vitesse de phase v_ϕ .

Nous formons une solution de type soliton en isolant un motif de la fonction décrite par l'équation (8), de la façon suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} G(\theta) & , \text{ si } \theta \in]0, \pi[\\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (9)$$

C'est à cette solution que nous nous intéressons désormais.

23. Exprimer la dérivée partielle $\partial u / \partial t$ comme fonction de la variable θ .

24. Représenter l'allure graphique de l'évolution temporelle des fonctions $\partial u / \partial t$ et u , pour une abscisse x fixée. On veillera à ce que les axes des temps se correspondent. Aucun calcul d'intégrale n'est attendu.

25. Représenter l'allure graphique de l'évolution spatiale des fonctions $\partial u / \partial t$ et u , pour un temps t fixé. On veillera à ce que les axes des espaces se correspondent. Aucun calcul d'intégrale n'est attendu.

26. L'onde étudiée semble-t-elle entrer dans le cadre défini dans la question (17) ? Une argumentation est attendue.

27. Nous notons $\Delta u = u_{\text{après}} - u_{\text{avant}}$ la variation de position des billes entre avant et après le passage de l'onde. Exprimer Δu en fonction de A et a .

Donnée :

$$I = \int_0^\pi (\sin s)^4 ds = \frac{3\pi}{8} \quad (10)$$

Il nous faut maintenant relier le paramètre A , encore indéterminé, aux conséquences du choc contre la première bille de la chaîne. Nous considérons alors

que Δu est égal au recouvrement maximal δ_M , produit par le choc d'une bille percutant la première bille à la vitesse v_0 , exprimé en réponse à la question (14).

28. Exprimer Δu en fonction de la vitesse d'impact v_0 , de la célérité du son c_{son} et du diamètre a des billes.

29. Nous omettons désormais les préfacteurs numériques intervenant dans les relations (comme nous l'avons déjà fait dans l'expression de q). Par exemple, la relation liant la célérité du soliton à celle du son (équation (8)) s'écrira simplement $c \sim A^{1/4} c_{\text{son}}$. À partir des résultats obtenus en réponse aux questions (27) et (28), établir une expression de A puis de c , en fonction de c_{son} et v_0 .

Comparer c à c_{son} , pour des situations pratiques.

30. Estimer la valeur de la vitesse c du soliton généré par une bille incidente percutant la chaîne avec la valeur de la vitesse d'impact $v_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (valeur adoptée à la question (14)).

Donnée : $\left(\frac{100}{0,39}\right)^{2/5} \simeq 9$