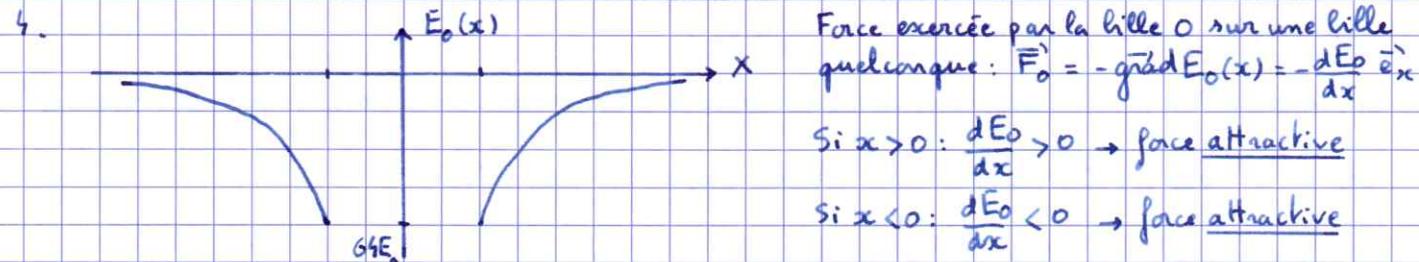


I Caractérisation du canon magnétique

1. Si la bille était uniquement en translation à la vitesse  $v$ , on aurait :  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$   
 Il y a ici en plus une énergie cinétique associée à la rotation donc :  $E_c > \frac{1}{2}mv^2$   
 $\Rightarrow \alpha > 1$

2. On a  $B_0(a) = B^*$  Donc  $B^*$  = champ magnétique crée par la bille 0 au centre de la bille 1  
 A.N:  $B^* = 0,1 \text{ T}$

3.  $E_0(x) = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0(x) = -\frac{\beta V}{\mu_0} B_0(x)^2 = -\frac{\beta V}{\mu_0} B^{*2} \frac{a^6}{x^6}$   
 $E_{01} = E_0(a) = -\frac{\beta V}{\mu_0} B^{*2}$  }  $\Rightarrow E_0(x) = E_{01} \frac{a^6}{x^6} = E_{01} \frac{1}{x^6}$



5.  $E_{01} = -1,2 \cdot 10^{-2} \text{ J}$      $E_{c1\infty} = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ J} \ll E_{01}$

6. Conservation de l'énergie mécanique de l'impacteur entre l'infini et l'impact :

$E_{c1\infty} = E_{c1c} + E_{01} \approx 0$  car  $E_{c1\infty} \ll E_{01}$   
 $0 = \frac{1}{2} \alpha m v_{ic}^2 + E_{01} \Rightarrow v_{ic} = \sqrt{-\frac{2E_{01}}{\alpha m}}$     A.N:  $v_{ic} \approx 2 \text{ ms}^{-1}$

7.  $E_{c,N,0} = \frac{1}{2} m v_{ic}^2 = \frac{1}{2} m \left( -\frac{2E_{01}}{\alpha m} \right)$  donc :  $E_{c,N,0} = -\frac{E_{01}}{\alpha}$

8. L'énergie potentielle d'interaction entre la bille 0 et la bille N ( $x = Na \Rightarrow x = N$ ) est :  $E_{0N} = \frac{E_{01}}{N^6} < 0$

La hauteur de la barrière à franchir est l'opposé :  $\Delta_N = -\frac{E_{01}}{N^6}$

La bille N peut franchir cette barrière si son énergie cinétique initiale est suffisante :

$E_{c,N,0} > \Delta_N \Rightarrow -\frac{E_{01}}{\alpha} > -\frac{E_{01}}{N^6} \Rightarrow N^6 > \alpha$

9. Conservation de l'énergie mécanique de la bille N entre la fin du contact et l'infini :

$\frac{1}{2} m v_{ic}^2 + (-\Delta_N) = \frac{1}{2} m \alpha v_{N,\infty}^2 \Rightarrow \alpha v_{N,\infty}^2 \approx v_{ic}^2 \Rightarrow v_{N,\infty} = \frac{v_{ic}}{\sqrt{\alpha}}$   
 A.N:  $v_{N,\infty} = 1,7 \text{ ms}^{-1}$

10.  $\left. \begin{array}{l} V \text{ varie en } a^3 \\ B^* \text{ varie en } a^{-3} \\ m \text{ varie en } a^3 \end{array} \right\} \Rightarrow E_{01} \text{ varie en } a^{-3}$   
 $\Rightarrow v_{ic} \text{ varie en } \left( \frac{a^{-3}}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{-3}$

Donc :  $v_{N,\infty}$  varie en  $a^{-3}$  et  $E_{c,N,\infty}$  varie  $a^3 \cdot (a^{-3})^2 = a^{-3}$

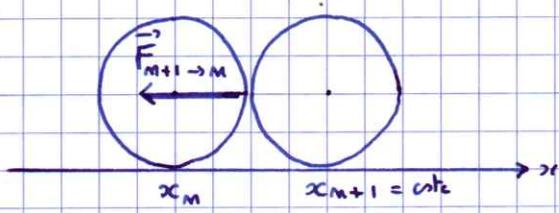
11. Compte tenu des hypothèses, il ne semble pas y avoir de différence avec l'étude précédente.

II Etude de la propagation de l'onde mécanique le long de la chaîne de billes

12. La force élastique de Hooke est proportionnelle à  $\delta$  et à la surface de contact  $S$ . Ici  $S$  n'est pas constante mais augmente quand  $\delta$  augmente. D'où une puissance  $> 1$  pour  $\delta$  afin de tenir compte du rôle de la surface de contact

13.  $\left. \begin{array}{l} q \text{ en } N \cdot m^{-3/2} \\ \gamma \text{ en } N \cdot m^{-2} \\ a \text{ en } m \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{q = \gamma \sqrt{a}} \quad \text{A.N.: } q = 2 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot m^{-3/2}$

14. 
$$\begin{aligned} \vec{F}_{m+1 \rightarrow m} &= -q \delta_{m+1}^{3/2} \vec{e}_x \\ &= -q(a - x_{m+1} + x_m)^{3/2} \vec{e}_x \\ &= -\frac{dEP}{dx_m} \vec{e}_x \\ \Rightarrow E_p &= \frac{2}{5} q (a - x_{m+1} + x_m)^{5/2} = \frac{2}{5} q \delta_{m+1}^{5/2} \end{aligned}$$



Conservation de l'énergie mécanique pour la bille incidente:  $\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + \frac{2}{5} q \delta_M^{5/2}$

D'où:  $\boxed{\delta_M = \left( \frac{5 m v_0^2}{4 q} \right)^{2/5}} \quad \text{A.N.: } \delta_M = 9,2 \mu m$

15.  $F_M = q \delta_M^{3/2} \quad \text{A.N.: } F_M = 550 \text{ N}$

16.  $F_M \gg F_{\text{magnétique}}$  donc c'est justifié de négliger  $F_{\text{magnétique}}$

17. On peut raisonner en ne considérant que les abscisses des centres des billes si  $a \gg \delta_M$

18. Principe fondamental de la dynamique à la bille  $m$ :

$$\begin{aligned} m \vec{a}_m &= \vec{F}_{m-1 \rightarrow m} + \vec{F}_{m+1 \rightarrow m} \\ \text{selon } Ox: m \ddot{u}_m &= q \delta_m^{3/2} - q \delta_{m+1}^{3/2} \\ &= q(a - x_m + x_{m-1})^{3/2} - q(a - x_{m+1} + x_m)^{3/2} \\ &= q(a - (ma + u_m) + ((m-1)a + u_{m-1}))^{3/2} - q(a - ((m+1)a + u_{m+1}) + (ma + u_m))^{3/2} \\ &= q(u_{m-1} - u_m)^{3/2} - q(u_m - u_{m+1})^{3/2} \\ &= \frac{K}{\sqrt{a}} \left[ (u_{m-1} - u_m)^{3/2} - (u_m - u_{m+1})^{3/2} \right] \end{aligned}$$

donc  $\sqrt{a} \ddot{u}_m = \Omega_0^2 \left[ (u_{m-1} - u_m)^{3/2} - (u_m - u_{m+1})^{3/2} \right]$  avec:  $\boxed{\Omega_0^2 = \frac{K}{m}}$

19. Pour un choc venant de la gauche, le centre de la bille  $m$  se déplace plus que le centre de la bille  $m+1 \Rightarrow u_m > u_{m+1} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} < 0$

$$\begin{aligned} 20. u_{m-1} &= u_m - a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad u_{m+1} = u_m + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{donc: } \sqrt{a} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Omega_0^2 \left[ \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{3/2} - \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{3/2} \right] \\ &= \Omega_0^2 \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{3/2} \left[ \left( 1 - \frac{a}{2} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \right)^{3/2} - \left( 1 + \frac{a}{2} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \right)^{3/2} \right] \\ &\approx \Omega_0^2 \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{3/2} \left[ 1 - \frac{3a}{4} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} - \left( 1 + \frac{3a}{4} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \right) \right] \end{aligned}$$

Donc:  $a^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Omega_0^2 a^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{3a}{2} \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\frac{\partial U}{\partial x}} \right)$

Finalement:  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{3}{2} \Omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^{\frac{1}{2}}$   $c_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \Omega_0 a$  en  $m \cdot s^{-1}$

Cette équation est un peu différente de celle de D'Alembert à cause du  $\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Elle n'est pas linéaire.

21.  $v_{cp}$  = vitesse de propagation d'une onde plane progressive harmonique

Ici l'onde proposée ne semble pas harmonique, mais le terme  $x-ct$  fait apparaître une vitesse:

$$v_{cp} = c = \sqrt{\frac{24}{5\pi}} A^{1/4} c_{son}$$

22.  $v_{cp}$  varie en  $A^{1/4}$  and so what?

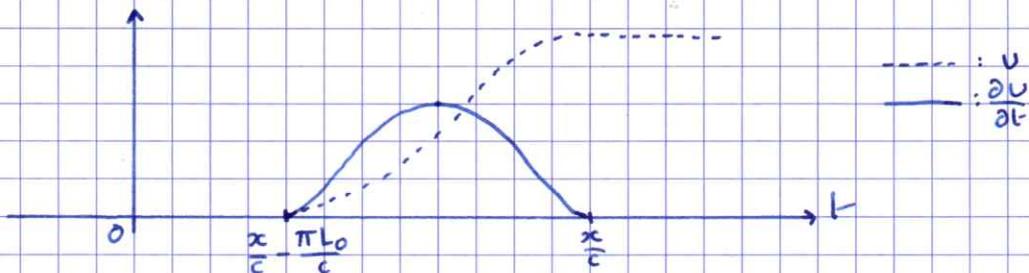
23.  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = F'(\theta) \cdot \left( -\frac{c}{L_0} \right)$

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = F'(\theta) \cdot \frac{1}{L_0} = G(\theta) \Rightarrow F'(\theta) = L_0 G(\theta)$

donc:  $\frac{\partial U}{\partial t} = -c G(\theta)$  soit:  $\frac{\partial U}{\partial t} = c A \sin^4 \theta$  si  $\theta \in ]0, \pi[$  0 sinon

24.  $\frac{\partial U}{\partial t} = c A \sin^4 \left( \frac{x-ct}{L_0} \right)$  avec:  $0 < \frac{x-ct}{L_0} < \pi \rightarrow \frac{x}{c} - \frac{\pi L_0}{c} < t < \frac{x}{c}$

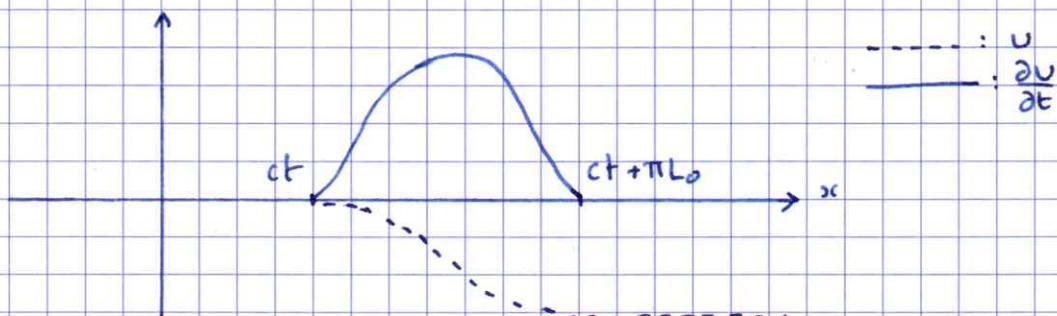
$U(t) - U\left(\frac{x}{c} - \frac{\pi L_0}{c}\right) = \int_{\frac{x}{c} - \frac{\pi L_0}{c}}^t c A \sin^4 \left( \frac{x-ct'}{L_0} \right) dt'$   
 = 0 aire sous la courbe  $\frac{\partial U}{\partial t}$



25. On a maintenant:  $0 < \frac{x-ct}{L_0} < \pi \rightarrow ct < x < ct + \pi L_0$

$U(x) - U(ct) = \int_{ct}^x \frac{\partial U}{\partial x} dx' = \int_{ct}^x \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \left( -\frac{1}{c} \right) dx'$  (d'après 23:  $\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t}$ )

$U(x) - U(ct) = -\frac{1}{c} \int_{ct}^x \frac{\partial U}{\partial t} dx'$   
 = 0 aire sous la courbe  $\frac{\partial U}{\partial t}$



26. L'étendue de l'onde est  $\Delta x = \pi L_0 = \pi \sqrt{\frac{5}{2}} a$  de l'ordre de  $5a$ . L'onde est localisée sur 5 billes. Elle ne voit pas vraiment un milieu continu.

$$27. \Delta U = \int_0^\pi \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = \int_0^\pi \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \int_0^\pi G(\theta) \cdot L_0 d\theta = L_0 \int_0^\pi -A \sin^4 \theta d\theta$$

$$\text{donc: } \boxed{\Delta U = -A \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} a \frac{3\pi}{8}}$$

$$28. \Delta U = \delta_m = \left( \frac{5m v_0^2}{4\rho} \right)^{2/5} \quad \text{avec: } q = \gamma \sqrt{a} = \rho c_{\text{son}}^2 \sqrt{a}$$
$$= \left( \frac{5m v_0^2}{4\rho c_{\text{son}}^2 \sqrt{a}} \right)^{2/5} \quad \text{or: } \frac{m}{\rho} = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{a}{2} \right)^3 = \frac{4\pi a^3}{24} = \frac{\pi a^3}{6}$$
$$= \left( \frac{5 v_0^2 \pi a^3}{24 c_{\text{son}}^2 \sqrt{a}} \right)^{2/5} \Rightarrow \boxed{\Delta U = \left( \frac{5\pi}{24} \right)^{2/5} \cdot a \cdot \left( \frac{v_0}{c_{\text{son}}} \right)^{4/5}}$$

29. On égale les deux expressions de  $\Delta U$  en oubliant les facteurs numériques:

$$A a \approx a \left( \frac{v_0}{c_{\text{son}}} \right)^{4/5} \Rightarrow \boxed{A = \left( \frac{v_0}{c_{\text{son}}} \right)^{4/5}} \quad (\text{on prend } |\Delta U| \text{ pour avoir } A > 0)$$

$$\text{Puis: } c = A^{1/4} c_{\text{son}} \Rightarrow \boxed{c = v_0^{1/5} \cdot c_{\text{son}}^{4/5}}$$

$$\text{Donc: } \frac{c}{c_{\text{son}}} = \left( \frac{v_0}{c_{\text{son}}} \right)^{1/5} \ll 1 \quad \text{car } v_0 \ll c_{\text{son}}$$

$$30. c_{\text{son}} = 5000 \text{ m s}^{-1} \quad \text{donc } \underline{c \approx 920 \text{ m s}^{-1}}$$