ENS Ulm. Option PC. 2025

Partie 1 : Energie électrostatique

1.1 Energie d'un système de charges ponctuelles

1. $W_{q_1\to q_2} = \int_\infty^{r_{12}} \vec{F}_{1\to 2}(M).d\vec{r}(M)$

$= \int_\infty^{r_{12}} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}.d\vec{r}(M) = \int_\infty^{r_{12}} \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$

$= \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^{r_{12}} = \frac{-q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$

Or : $W_{q_1\to q_2} = -\Delta E_p = -(U_{12}-0)$ Donc : $\boxed{U_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}$

2. $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{\text{grad}}_1 U_{12} = -\vec{\text{grad}}_1\left(\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}\right) = -\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\text{grad}}_1\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\vec{F}_{1\to 2}$

Ce résultat est attendu (principe des actions réciproques) donc cette énergie potentielle décrit complètement l'interaction entre les deux charges.

3. $a = \frac{1}{2}$ pour ne pas compter deux fois l'interaction entre les particules i et j

$\boxed{V_{i\to j} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$ U_q a un signe quelconque

4. $U_q = U_q^\alpha + U_q^\beta + U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta}$

avec : $\boxed{U_q^\alpha = \frac{1}{2}(q_1V_{2\to 1} + q_2V_{1\to 2})}$

$\boxed{U_q^\beta = \frac{1}{2}(q_3V_{4\to 3} + q_4V_{3\to 4})}$

$\boxed{U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta} = \frac{1}{2}(q_1V_{3\to 1} + q_1V_{4\to 1} + q_2V_{3\to 2} + q_2V_{4\to 2} + q_3V_{1\to 3} + q_3V_{2\to 3} + q_4V_{1\to 4} + q_4V_{2\to 4})}$

5. On peut réécrire, pour la question 4 :

$U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta} = \frac{1}{2}\left[q_1\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + q_1\frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_{14}} + q_2\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + q_2\frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_{24}} + \frac{q_3q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_3q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \frac{q_4q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{14}} + \frac{q_4q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{24}}\right]$

$= \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_1q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_{14}} + \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \frac{q_2q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_{24}}$

$= q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right) + q_4\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{14}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{24}}\right)$

En généralisant : $U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta} = \sum_{j\in S_q^\beta} q_j\left(\sum_{i\in S_q^\alpha}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right)$

Donc : $b = 1$ $\boxed{V_{\alpha\to j} = \sum_{i\in S_q^\alpha}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$ On a aussi : $U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta} = \sum_{i\in S_q^\alpha} q_i V_{\beta\to i}$

1.2 Formulations intégrales de l'énergie électrostatique

6. $U_\rho = \iiint_{S_\rho} \frac{1}{2}\rho(\vec{r})V_\rho(\vec{r})\,d\tau$

$= \iiint_{S_\rho^\alpha} \frac{1}{2}\rho_\alpha(\vec{r})\left(V_\alpha(\vec{r}) + V_\beta(\vec{r})\right)d\tau + \iiint_{S_\rho^\beta} \frac{1}{2}\rho_\beta(\vec{r})\left(V_\alpha(\vec{r}) + V_\beta(\vec{r})\right)d\tau$

$= \iiint_{S_\rho^\alpha} \frac{1}{2}\rho_\alpha(\vec{r})V_\alpha(\vec{r})\,d\tau + \iiint_{S_\rho^\beta}\frac{1}{2}\rho_\beta(\vec{r})V_\beta(\vec{r}) + \iiint_{S_\rho^\alpha}\frac{1}{2}\rho_\alpha(\vec{r})V_\beta(\vec{r}) + \iiint_{S_\rho^\beta}\frac{1}{2}\rho_\beta(\vec{r})V_\alpha(\vec{r})$

Donc : $U_e = U_e^\alpha + U_e^\beta + U_e^{\alpha\leftrightarrow\beta}$

Avec : $\boxed{U_e^\alpha = \frac{1}{2}\iiint_{S_e^\alpha} \rho_\alpha(\vec{r}')V_\alpha(\vec{r}')\,d\tau}$

$\boxed{U_e^\beta = \frac{1}{2}\iiint_{S_e^\beta} \rho_\beta(\vec{r}')V_\beta(\vec{r}')\,d\tau}$

$\boxed{U_e^{\alpha\leftrightarrow\beta} = \frac{1}{2}\left(\iiint_{S_e^\alpha} \rho_\alpha(\vec{r}')V_\beta(\vec{r}') + \iiint_{S_e^\beta} \rho_\beta(\vec{r}')V_\alpha(\vec{r}')\right)}$

7 - Pour U_q, on a $i \neq j$ dans le cas des charges ponctuelles, donc on ne peut pas avoir $q_i V_{i\to i}$
Alors que pour le cas continu, on peut avoir le produit $\rho(\vec{r}')V(\vec{r}')$ au même point
Pour $U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta}$ et $U_e^{\alpha\leftrightarrow\beta}$ il n'y a pas ce problème.

8 - $U_e' = \frac{1}{2}\iiint_{S_e} \rho(\vec{r}')(V(\vec{r}')+\Delta V)\,d\tau = \frac{1}{2}\iiint_{S_e}\rho(\vec{r}')V(\vec{r}') + \frac{1}{2}\underbrace{\iiint_{S_e}\rho(\vec{r}')\,d\tau}_{=Q}\,.\,\Delta V$

Donc : $\boxed{U_e' = U_e + \frac{1}{2}Q\Delta V}$

De même en utilisant les trois expressions possibles pour $U_e^{\alpha\leftrightarrow\beta}$:

$$\boxed{U_e'^{\alpha\leftrightarrow\beta} = U_e^{\alpha+\beta} + \frac{1}{2}(Q_\alpha + Q_\beta)\Delta V = U_e^{\alpha+\beta} + Q_\alpha\Delta V = U_e^{\alpha+\beta} + Q_\beta\Delta V}$$

Les trois expressions sont égales si : $Q_\alpha\Delta V = Q_\beta\Delta V = \frac{1}{2}Q\Delta V$
Cela n'est pas possible en général, sauf si $\Delta V = 0$
L'expression (11) n'est donc valable qu'avec l'hypothèse d'un potentiel nul à l'infini

9 - D'après l'équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Donc : $U_e = \frac{1}{2}\iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0\,\mathrm{div}\vec{E}(r)\,.\,V_e(\vec{r}')\,d\tau$

$= \frac{1}{2}\iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0\left[\mathrm{div}(V_e(r)\vec{E}(r)) - \vec{E}(r)\,.\,\vec{\mathrm{grad}}\,V_e(\vec{r}')\right]d\tau$ or : $\vec{E}(r) = -\vec{\mathrm{grad}}\,V_e(\vec{r})$

$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\underbrace{\iiint_{\text{espace}}\mathrm{div}(V_e(r)\vec{E}(r))\,d\tau}_{} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_{\text{espace}}\vec{E}^2(\vec{r})\,d\tau$

$= \oint_{\substack{\text{surface qui}\\ \text{"délimite" l'espace = sphère de rayon infini}}} V_e(r)\vec{E}(r)\,d\vec{S}(r) = 0$ car V et $\vec{E}$ nuls à l'infini

Donc : $\boxed{U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_{\text{espace}}\vec{E}^2(\vec{r})\,d\tau}$

10 - $\underline{U_{es} \geq 0}$ car $\vec{E}^2 \geq 0$

L'expression (9) de U_q peut être ≥ 0 ou < 0
La différence vient du fait que l'expression (9) ne tient pas compte de l'énergie électrostatique propre des charges ponctuelles.

On ne peut pas conclure. Il faudrait connaître le signe > 0 ou < 0 de l'énergie électrostatique d'interaction mutuelle entre deux sous-systèmes.

11 - Pour une charge ponctuelle : $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

Donc : $U_{es} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0^2 r^4}\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_0^{+\infty} \longrightarrow +\infty$

ENS Ulm - Option PC. 2025

L'énergie électrostatique n'est pas définie pour une charge ponctuelle.
On ne peut pas utiliser les formules (11) et (13).

12. $U_e = \iiint_{espace} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})\right)^2 d\tau_{\vec{r}}$

$$= \iiint_{espace} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}_1^2(r)\, d\tau_{\vec{r}} + \iiint_{espace} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}_2^2(r)\, d\tau_{\vec{r}} + \underbrace{\iiint_{espace} \varepsilon_0 \vec{E}_1(r)\vec{E}_2(r)\, d\tau_{\vec{r}}}_{\text{intégrale non divergente} = U_{12}}$$

$$U_{12} = \iiint_{espace} \varepsilon_0 \frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \cdot \frac{q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\, d\tau_{\vec{r}}$$

on pose : $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_2 \rightarrow d\tau_{\vec{r}} = d\tau_{\vec{R}}$

$$= \frac{\varepsilon_0 q_1 q_2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \iiint_{espace} \frac{\vec{R}\cdot(\vec{R}+\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{R^3 (\vec{R}+\vec{r}_2-\vec{r}_1)^3}\, d\tau_{\vec{R}}$$

on pose : $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = r_{12}\vec{m}$
$\vec{R} = r_{12}\vec{r}\,'$ $\quad \vec{r}\,'$ sans dimension
$d\tau_{\vec{R}} = r_{12}^3 d\tau_{\vec{r}\,'}$

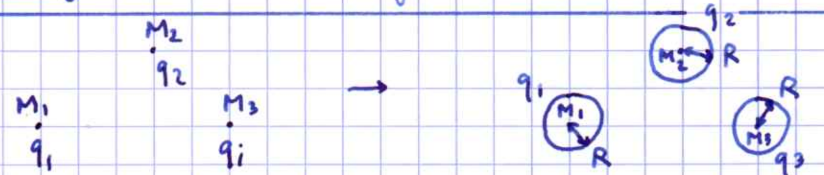
$$= \frac{\varepsilon_0 q_1 q_2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \iiint_{espace} \frac{r_{12}\vec{r}\,' \cdot r_{12}(\vec{r}\,'+\vec{m})}{r_{12}^3 r'^3 \cdot r_{12}^3(\vec{r}\,'+\vec{m})^3}\, r_{12}^3\, d\tau_{\vec{r}\,'}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 q_1 q_2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{1}{r_{12}} \underbrace{\iiint_{espace} \frac{\vec{r}\,'(\vec{r}\,'+\vec{m})}{r'^3(\vec{r}\,'+\vec{m})^3}\, d\tau_{\vec{r}\,'}}_{= 4\pi \text{ (formule 6)}}$$

Donc : $\boxed{U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}$ On retrouve le résultat de la question 1

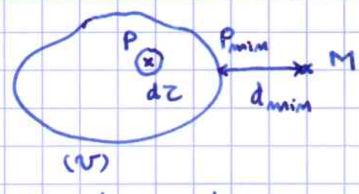
1.3 Energie electrostatique et grandeurs nivelées

13.



14. Pour une charge q_i : $\rho = \frac{q_i}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow \boxed{f(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi R^3}}$ si $0 \leq \|\vec{r} - \vec{r}_i\| \leq R$

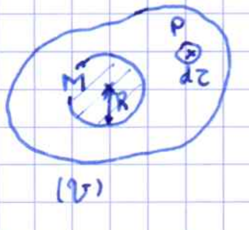
15.



$$V(M) = \iiint_{(V)} \frac{\rho(P)\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{PM}\|}$$

Si M extérieur à (V) : $V(M) \leq \iiint_{(V)} \frac{\rho_M\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 d_{min}} = \frac{\rho_M V}{4\pi\varepsilon_0 d_{min}}$ fini

Si M intérieur à (V) : (V) = sphère de centre M rayon R + $(V)_{reste}$



$$V(M) = \underbrace{\iiint_{(V)reste} \frac{\rho(P)\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{PM}\|}}_{\text{fini d'après le cas précédent}} + \iiint_{(V)sphère} \frac{\rho(P)\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{PM}\|}$$

$$\iiint_{(V)sphère} \frac{\rho(P)\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{PM}\|} \leq \rho_M \iiint_{sphère} \frac{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr}{4\pi\varepsilon_0\, r} = \rho_M \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{2} \text{ fini}$$

Donc V(M) est fini

16. $U_e = \frac{1}{2}\iiint_{S_p} \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,d\tau_{\vec{r}}$

$\rho(\vec{r})$ est finie, $V(\vec{r})$ est fini (question 15), S_p est un volume fini. Donc U_e est finie

17. Pour la boule homogène de rayon R, on a (voir cours) : $\vec{E} = \frac{q r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{u}_r$ si $r < R$

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ si $r > R$

Donc : $U_e = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q^2 r^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 R^6}\right) r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$+ \int_R^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 R^6}\frac{R^5}{5}\cdot 4\pi + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\cdot\frac{1}{R}\cdot 4\pi$

Donc : $\boxed{U_e = \frac{3}{20}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}}$

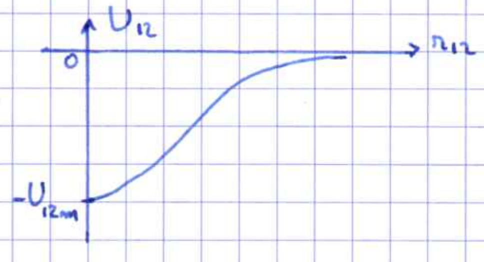
18. On pose : $\frac{3}{20}\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0 R_e} = mc^2 \rightarrow R_e = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 m c^2}$ A.N : $R_e = 1{,}7\cdot 10^{-15}$ m

A cette échelle, il faut tenir compte de la mécanique quantique.

19. Vu de l'extérieur, le champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée est le même que celui d'une charge ponctuelle égale à la charge de la boule, placée au centre de la boule.
Si les deux charges nivelées ne se recoupent pas, on est dans ce cas. Donc l'énergie d'interaction U_{12} est la même pour les charges ponctuelles et pour les charges nivelées.

20. Les charges sont de signes opposés $\Rightarrow$ elles s'attirent
L'énergie potentielle d'interaction U_{12} va donc décroître quand r_{12} va décroître et sera minimale quand r_{12} sera nul (charges superposées)

21. $q_1 q_2 < 0$: attraction



$q_1 q_2 > 0$: répulsion

22. Avec des charges ponctuelles : $r_{min} = 0$ mais $U_{12} \to +\infty$
Avec des charges nivelées : $r_{min} \neq 0$ et U_{12} finie.

A priori : $\boxed{r_{min} = 2R}$

ENS Ulm. Option PC. 2025

1.4 Etude d'un système de sphères concentriques.

23. a) Avec le théorème de Gauss pour la sphère de rayon de R chargée en surface :

$$\boxed{\vec{E}_s(P^-) = \vec{0}} \quad \boxed{\vec{E}_s(P^+) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_r}$$

b) Le plan Σ infini vu des points P^- et P^+ est un plan de symétrie des charges. $\vec{E}$ doit donc aussi être symétrique par rapport à ce plan : $\vec{E}_\Sigma(P^-) = -\vec{E}_\Sigma(P^+)$

Donc : $\alpha = -1$

Le champ créé par Σ en P n'est pas défini. Il y a discontinuité en P.

c) $\vec{E}_s(P^+) = \vec{E}_{\bar{\Sigma}}(P^+) + \vec{E}_\Sigma(P^+)$
$\vec{E}_s(P^-) = \vec{E}_{\bar{\Sigma}}(P^-) + \vec{E}_\Sigma(P^-)$

$\Rightarrow \vec{E}_s(P^+) + \vec{E}_s(P^-) = \vec{E}_{\bar{\Sigma}}(P^+) + \vec{E}_{\bar{\Sigma}}(P^-) = 2\vec{E}_{\bar{\Sigma}}(P)$ car $\vec{E}_{\bar{\Sigma}}(P)$ est continu en P

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\bar{\Sigma}}(P) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_r}$$

24. $d\vec{F} = dQ.\vec{E}_{\bar{\Sigma}}(P)$ avec : $dQ = \sigma\, dS$

$= \sigma dS . \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_r$ avec : $Q = \sigma . 4\pi R^2$

$= \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, d\vec{S}$ avec : $d\vec{S} = dS\,\vec{u}_r$

donc : $\boxed{P_{eq} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

Cette force est toujours selon $+\vec{u}_r$, quel que soit le signe de Q. Elle tend à faire exploser la sphère.

25. $W = \int_{R_1}^{R_2} \delta W$ avec : $\delta W = \iint_{\text{sphère}} d\vec{F}.d\vec{r} = \iint \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS.dr = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}dr$

Donc : $W = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

Soit : $\boxed{\Delta U = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)}$ car $W = -\Delta U$

Avec : $\Delta U = U_s(\infty) - U_s(R) \Rightarrow \boxed{U_s(R) = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$

26. Force élémentaire exercée par S^a sur dS de S^b : $\sigma^b.dS.\dfrac{Q^a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

Travail élémentaire reçu par dS : $\dfrac{Q^b}{4\pi r^2}.dS.\dfrac{Q^a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r.(dr\,\vec{u}_r) = \dfrac{Q^aQ^b}{(4\pi)^2\varepsilon_0 r^4}dS\,dr$

Travail élémentaire reçu par S^b : $\dfrac{Q^aQ^b}{(4\pi)^2\varepsilon_0 r^4}.4\pi r^2.dr = \dfrac{Q^aQ^b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$

Travail total reçu par S^b : $\boxed{W_{a\to b} = \dfrac{Q^aQ^b}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1^b} - \dfrac{1}{R_2^b}\right)}$

27. La sphère b crée un champ électrostatique nul dans son volume intérieur car elle n'est chargée qu'en surface. Donc :

$$\boxed{W_{b\to a} = 0}$$

Il n'y a pas de contradiction avec la troisième loi de Newton car elle s'applique aux forces et non pas aux travaux.

28. On construit le système en imaginant un opérateur qui construit le système en prenant la sphère A à l'infini et en l'amenant à sa position finale de façon quasi-statique. Puis en recommençant pour la sphère B initialement à l'infini.

Théorème de l'énergie cinétique pour les deux sphères :

$$\Delta E_c = W_{op} + W_{int} = W_{op} + W_{a \to a} + W_{a \to b} + W_{b \to b}$$

$$\underset{\text{(quasi-statique)}}{0} = W_{op} + \frac{{Q^a}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R^a}\right) + \frac{Q^a Q^b}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R^b}\right) + \frac{{Q^b}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R^b}\right)$$

Or $W_{op} = \Delta U_{rot} = U_{rot} - 0$ donc : $\boxed{U_{rot} = \frac{{Q^a}^2}{8\pi\varepsilon_0 R^a} + \frac{{Q^b}^2}{8\pi\varepsilon_0 R^b} + \frac{Q^a Q^b}{4\pi\varepsilon_0 R^b}}$

$$R_a < R_b \Rightarrow \frac{1}{R_a} > \frac{1}{R_b} \Rightarrow U_{rot} > \frac{{Q^a}^2}{8\pi\varepsilon_0 R^b} + \frac{{Q^b}^2}{8\pi\varepsilon_0 R^b} + \frac{Q^a Q^b}{4\pi\varepsilon_0 R^b} = \frac{(Q^a + Q^b)^2}{8\pi\varepsilon_0 R^b} > 0$$

Donc : $\underline{U_{rot} > 0}$

29. Pour $Q^a = -Q^b = Q$, on a : $U_{rot} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R^a} - \frac{1}{R^b}\right)$

Avec la formule (13) : $U_{es} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 \, d\tau$

Pour le système des deux sphères avec $Q^a = -Q^b$, le théorème de Gauss permet de montrer que :

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ si } r < R^a \text{ et } r > R^b \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \text{ si } R^a < r < R^b$$

Donc : $U_{es} = \iiint_{\substack{\text{espace}\\\text{entre les}\\\text{2 sphères}}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \, dr\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{=4\pi} \int_{R^a}^{R^b} \frac{dr}{r^2}$

D'où : $\boxed{U_{es} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R^a} - \frac{1}{R^b}\right) = U_{rot}}$ On retrouve le même résultat

30. Si $R^a \to +\infty$ et $R^b \to +\infty$, on a : $U_{es} = 0$

Les sphères étant à l'infini, leur énergie d'interaction est nulle. Mais leur énergie propre ne l'est pas. On ne devrait pas trouver 0.

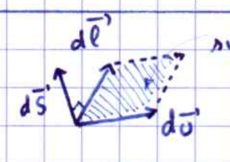
ENS Ulm. Option PC. 2025

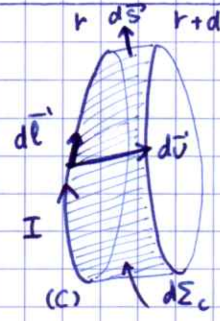
Partie 2 : Energie magnétique

2.1 Travail des forces de Laplace et théorème de Maxwell

31. $\delta W_L = d\vec{F}_L \cdot d\vec{u} = (I\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{u} = I\vec{B} \cdot (d\vec{u} \wedge d\vec{\ell})$ par permutation circulaire dans un produit mixte

32.





Pour le circuit C : $\delta W_L = \oint_C \delta W_L$

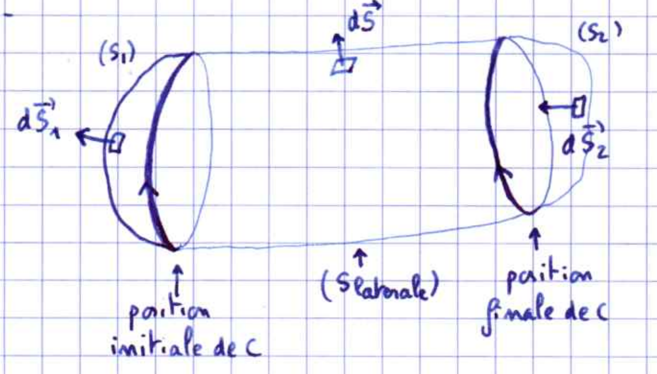
$$= I\oint_{(C)} \vec{B}\cdot\underbrace{(d\vec{u}\wedge d\vec{\ell})}_{=d\vec{S}}$$

$$= \underbrace{I\oint_{(C)} \vec{B}\cdot d\vec{S}}_{\text{flux coupé } d\Phi_c}$$

Donc : $\boxed{\delta W_L = I\, d\Phi_c}$

33. a) Non car le champ magnétique dépend du temps
b) Oui car le travail va dépendre du chemin suivi
c) Le travail va encore dépendre du chemin suivi

34.



Soient (S_1) et (S_2) deux surfaces s'appuyant sur C, respectivement aux instants initial et final.
On les oriente en fonction de l'orientation de C

$(S_1) \cup (S_2) \cup (S_{\text{latérale}}) = (S)_{\text{fermée}}$

Même si $(S)_{\text{fermée}}$ est construite à partir de surfaces prises à différents instants, on peut utiliser la nullité du flux sortant de $\vec{B}$ car $\vec{B}$ est stationnaire.

$$\oint\!\!\oint_{(S)\text{fermée}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{(S_1)} \vec{B}\cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{B}\cdot(-d\vec{S}_2) + \underbrace{\iint_{(S_{\text{latérale}})} \vec{B}\cdot d\vec{S}}_{\text{flux coupé } \Phi_c}$$

Donc : $0 = \Phi_{ini} - \Phi_{fin} + \Phi_c \Rightarrow \Phi_c = \Phi_{fin} - \Phi_{ini} = \Delta\Phi$

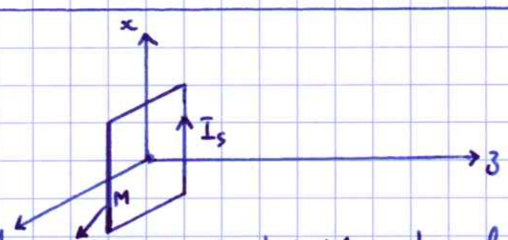
Puis : $W_L = \int_i^f \delta W_L = \int_i^f I\, d\Phi_c = I\,\Phi_c$

Finalement : $\boxed{W_L = I\,\Delta\Phi}$ $(\eta = 1)$

35. U_I telle que : $W_L = -\Delta U_I$ d'où : $\boxed{U_I = -I\,\Phi}$

Un circuit rigide dans un champ stationnaire va se déplacer pour <u>maximiser le flux magnétique</u> qui le traverse afin de <u>minimiser l'énergie potentielle</u>
A Q34 il n'y a pas d'hypothèse sur la rigidité du circuit donc ce résultat est encore valable.

Q36. Travail des forces de Laplace pour la translation $d\vec{u}$:



$$\delta W_L = \oint_{spire} (I_s\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B_0}) \cdot d\vec{u}$$
$$= \oint_{spire} I_s \vec{B_0} \cdot (d\vec{u} \wedge d\vec{\ell})$$
$$= I_s \vec{B_0} \cdot \Big(d\vec{u} \wedge \underbrace{\oint_{spire} d\vec{\ell}}_{=\vec{0}}\Big) \quad \text{car } \vec{B_0} \text{ et } d\vec{u} \text{ uniformes}$$

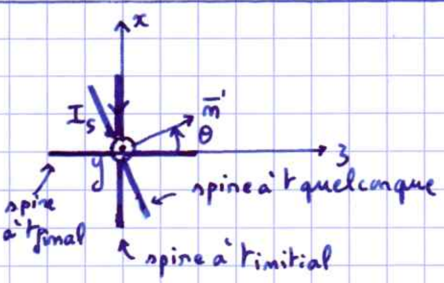
$d\vec{u}$ indépendant de M car translation

Donc : $\boxed{\delta W_L = 0}$

Par le théorème de Maxwell : $\delta W_L = I_s\, d\Phi$

Or $d\Phi = 0$ car le flux $\Phi = B_0 a^2$ est constant. On retrouve $\delta W_L = 0$

Q37. La spire dans $\vec{B}$ uniforme est un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = I_s a^2 \vec{m}$



Couple de Laplace : $\vec{\Gamma_L} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B_0}$

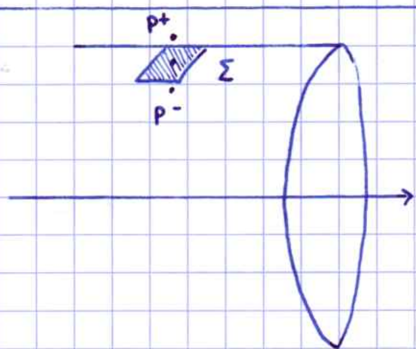
$$= I_s a^2 \begin{vmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix}$$
$$= -I_s a^2 B_0 \sin\theta\, \vec{e_y}$$

Le travail du couple de Laplace pour une rotation élémentaire est : $\delta W_L = \Gamma_L\, d\theta$
$= -I_s a^2 B_0 \sin\theta\, d\theta$

D'où : $W_L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -I_s a^2 B_0 \sin\theta\, d\theta = -I_s a^2 B_0 \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{W_L = -I_s a^2 B_0}$

On a : $\Delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = 0 - B_0 a^2$ On a bien : $W_L = I_s \Delta\Phi$

Q38. On a : $\vec{B_s} = \vec{B_\Sigma} + \vec{B_{\bar{\Sigma}}}$



Donc : $\vec{B_s}(P^+) = \vec{0} = \vec{B_\Sigma}(P^+) + \vec{B_{\bar{\Sigma}}}(P^+)$
$\vec{B_s}(P^-) = \mu_0 m I_0 \vec{e_z} = \vec{B_\Sigma}(P^-) + \vec{B_{\bar{\Sigma}}}(P^-)$

$\vec{B_{\bar{\Sigma}}}$ est continu sur Σ : $\vec{B_{\bar{\Sigma}}}(P^+) = \vec{B_{\bar{\Sigma}}}(P^-)$

Par soustraction : $\mu_0 m I_0 \vec{e_z} = \vec{B_\Sigma}(P^-) - \vec{B_\Sigma}(P^+)$

Pour les points P^- et P^+, Σ apparaît comme un plan infini parcouru par des courants. C'est un plan de symétrie, donc : $\vec{B_\Sigma}(P^-) = -\vec{B_\Sigma}(P^+)$

D'où $\vec{B_\Sigma}(P^+) = -\frac{1}{2}\mu_0 m I_0 \vec{e_z}$

Puis $\vec{B_{\bar{\Sigma}}}(P^+) = -\vec{B_\Sigma}(P^+) = \frac{1}{2}\mu_0 m I_0 \vec{e_z}$ Donc : $\boxed{\vec{B_{\bar{\Sigma}}}(P) = \frac{1}{2}\mu_0 m I_0 \vec{e_z}}$

Q39. Sur un fil de Σ, la force de Laplace est : $I_0 b\, \vec{e_\theta} \wedge B_{\bar{\Sigma}}(P)\, \vec{e_z} = \frac{1}{2}\mu_0 m I_0^2 b\, \vec{e_r}$

Sur Σ de largeur b, il y a mb fils donc : $d\vec{F} = \frac{1}{2}\mu_0 m^2 I_0^2 b^2 \vec{e_r}$ or $b^2 \vec{e_r} = d\vec{S}$

On a bien : $d\vec{F} = P_{ms}\, d\vec{S}$ avec $\boxed{P_{ms} = \frac{1}{2}\mu_0 m^2 I_0^2}$ Force toujours selon $+\vec{e_r}$

Q40. $W_L = \int_R^{2R} \iint_{solenoide} d\vec{F} \cdot dr\, \vec{e_r} = \int_R^{2R} P_{ms}\, r\, d\theta\, dz\, dr = P_{ms} \cdot 2\pi L \int_R^{2R} r\, dr$
$= P_{ms}\, 2\pi L\, \frac{4R^2 - R^2}{2}$ Soit : $\boxed{W_L = \frac{3}{2}\pi R^2 L \mu_0 m^2 I_0^2}$

Par le théorème de Maxwell : $W_L = I_0(\Phi_f - \Phi_i) = I_0(\pi(2R)^2 . nL . B_0 - \pi R^2 . nL . B_0)$
surface d'une spire ↑ ↑ nombre de spires

Donc : $W_L = 3\pi R^2 L \mu_0 n^2 I_0^2$

On ne retrouve pas le même résultat. Le théorème de Maxwell n'est pas valable car le champ magnétique n'est pas stationnaire. Il passe de 0 à $\mu_0 n I_0$ entre R et 2R.

2.2 Energie d'une distribution volumique de courants

41. En ARQS on néglige les temps de propagation du signal électromagnétique devant le temps caractéristique de variation des courants. Mais ceux-ci rayonnent quand même de l'énergie

42. Force de Lorentz sur les charges mobile du volume $d\tau_{\vec{r}'}$: $\rho_e d\tau_{\vec{r}'} . (\vec{E}(\vec{r}') + \vec{v}_e \wedge \vec{B}(r))$

Puissance élementaire : $d\mathcal{P} = \rho_e d\tau_{\vec{r}'} . (\vec{E}(\vec{r}') + \vec{v}_e \wedge \vec{B}(r)) . \vec{v}_e = \rho_e \vec{v}_e . \vec{E}(\vec{r}) d\tau = \vec{j}(\vec{r}')\vec{E}(r) d\tau$

D'où : $\boxed{\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}(\vec{r}')\vec{E}(\vec{r}') d\tau_{\vec{r}'}}$

La composante statique du champ $\vec{E}$ est $-\overrightarrow{\text{grad}}V(\vec{r})$

Donc : $\mathcal{P}_S = \iiint_{\mathcal{D}} -\vec{j}(r) . \overrightarrow{\text{grad}}V(\vec{r}') d\tau_{\vec{r}'}$

$= \iiint_{\mathcal{D}} \left[V(\vec{r}') . \underbrace{\text{div}\vec{j}(\vec{r}')}_{=0 \text{ en ARQS}} - \text{div}(V(\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}'))\right] d\tau_{\vec{r}'}$

$= -\iiint_{\mathcal{D}} \text{div}(V(\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}')) d\tau_{\vec{r}'}$

$= -\oint_{(S) \text{ fermée délimitant } (\mathcal{D})} V(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}') . d\vec{S}$ d'après le théorème d'Ostrogradski

Or $\vec{j}(r) . d\vec{S} = 0$ sur (S) fermée car les courants ne traversent pas la frontière (S) délimitant leur volume ($\mathcal{V}$)

Donc : $\mathcal{P}_S = 0$. C'est la composante induite de $\vec{E}(\vec{r})$ qui a une contribution non nulle

43. $\frac{d}{dt}\left(\iiint_{V_R} \frac{\vec{B}^2(\vec{r}')}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}}\right) = \iiint_{V_R} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}^2(\vec{r}')}{2\mu_0}\right) d\tau_{\vec{r}}$

$= \iiint_{V_R} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) . \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}') d\tau_{\vec{r}'}$

$= -\iiint_{V_R} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) . \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}(\vec{r}) d\tau_{\vec{r}}$

Or $\vec{B}(\vec{r}') . \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}(r) = \text{div}(\vec{E}(\vec{r}') \wedge \vec{B}(\vec{r}')) + \vec{E}(r) . \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}(r)$
↓ Maxwell - Ampère en ARQS
$= \text{div}(\mu_0 \vec{\Pi}(\vec{r}')) + \vec{E}(r) . \mu_0 \vec{j}(r)$

Donc : $\frac{d}{dt}\left(\iiint_{V_R} \frac{\vec{B}^2(\vec{r}')}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}}\right) = -\iiint_{V_R} \text{div}(\mu_0 \vec{\Pi}(r)) . \frac{1}{\mu_0} d\tau_{\vec{r}'} - \iiint_{V_R} \vec{E}(\vec{r}) . \mu_0 \vec{j}(r) . \frac{1}{\mu_0} d\tau_{\vec{r}'}$

$= -\oint_{\Sigma_R} \vec{\Pi}(\vec{r}) . d\vec{S}_{\vec{r}'} - \iiint_{V_R} \vec{j}(\vec{r}') . \vec{E}(\vec{r}) d\tau_{\vec{r}'}$ d'après Ostrogradski

D'où : $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\iiint_{V_R} \frac{\vec{B}^2(\vec{r}')}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}'}\right) = -\oint_{\Sigma_R} \vec{\Pi}(\vec{r}') d\vec{S}_{\vec{r}'} - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}(\vec{r}')\vec{E}(\vec{r}) d\tau_{\vec{r}'}}$ car $\vec{j} = \vec{0}$ entre $\mathcal{D}$ et V_R

44. Pour $t > T$: régime stationnaire

Le champ $\vec{E}$ devient électrostatique : $\iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}(\vec{r}).\vec{E}(r)\, d\tau_{\vec{r}} = 0$ d'après Q42

On fait tendre V_R vers tout l'espace en prenant $R \to +\infty$. Σ_R devient une sphère de rayon infini.

Sur cette sphère : $\oint_{\Sigma_{R\,infini}} \frac{\vec{E}(\vec{r}) \wedge \vec{B}(\vec{r})}{\mu_0} d\vec{S}_r = 0$ car $\vec{E}(\vec{r})$ varie en $\frac{1}{r^3}$ (car $Q = 0$)

$\vec{B}(\vec{r})$ varie en $\frac{1}{r^3}$

$d\vec{S}$ varie en r^2

$\Rightarrow$ l'ensemble varie en $\frac{1}{r^4} \to 0$

Il reste : $\frac{d}{dt}\left(\iiint_{espace} \frac{\vec{B}^2(\vec{r})}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}} \right) = 0$

$\Rightarrow$ $U_{ms} = \iiint_{espace} \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2(\vec{r})}{\mu_0} d\tau_{\vec{r}}$ est l'énergie magnétique constante de la distribution

45. $$U_{ms_f} - U_{ms_i} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\left[\pi(2R)^2 L - \pi R^2 L\right]$$
$$= \frac{3}{2}\frac{B_0^2}{\mu_0}\pi R^2 L$$
$$= \frac{3}{2}\pi R^2 L \mu_0 n^2 I_0^2$$
<u>On retrouve W_L de Q40</u>

46. Champ magnétique total : $\vec{B}(\vec{r}) = \sum_a \vec{B}_a(\vec{r})$

Donc $\vec{B}(r)^2 = \sum_a \vec{B}_a(\vec{r})^2 + \sum_{a \neq b} \vec{B}_a(\vec{r}).\vec{B}_b(\vec{r})$

Donc : $U_{ms} = \sum_a \iiint_{espace} \frac{\vec{B}_a(\vec{r})^2}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}} + \sum_{a\neq b} \iiint_{espace} \frac{\vec{B}_a(\vec{r})\,\vec{B}_b(\vec{r})}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}}$

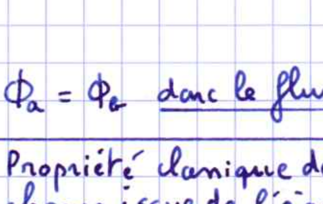
D'où : $\boxed{U_J^a = \iiint_{espace} \frac{\vec{B}_a(\vec{r})^2}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}}} \geq 0$

$\boxed{U_J^{a\leftrightarrow b} = \iiint_{espace} \frac{\vec{B}_a(\vec{r}).\vec{B}_b(\vec{r})}{\mu_0} d\tau_{\vec{r}}}$ (a et b puis b et a $\Rightarrow$ disparition du $\frac{1}{2}$)

de signe quelconque

2.3 <u>Energie d'un ensemble de circuits filiformes</u>

47.



$\Sigma_a \cup \Sigma_b$ est une surface fermée

$\Rightarrow \oint_{\Sigma_a \cup \Sigma_b} \vec{B}.d\vec{S} = 0$ (flux sortant nul)

$\Rightarrow \oint_{\Sigma_a} \vec{B}.d\vec{S}_a + \iint_{\Sigma_b} \vec{B}.(-d\vec{S}_b) = 0$

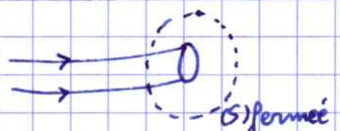
$\Rightarrow \Phi_a - \Phi_b = 0$

$\Phi_a = \Phi_b$ <u>donc le flux à travers C_a ne dépend pas de la surface choisie</u>

48. Propriété classique de conservation du flux magnétique le long d'un tube de champ issue de l'équation de Maxwell : $\text{div}\,\vec{B} = 0$

• ENS Ulm. Option PC. 2025 •

49. On suppose que le tube s'arrête sans se refermer :

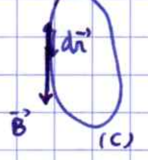


A cause du tube, le flux à travers (S) fermée est non nul. Or il devrait être nul d'après $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

⇒ contradiction

⇒ <u>le tube doit se refermer sur lui-même</u> (ou alors aller à l'infini avec un champ $\vec{B}$ tendant vers 0)

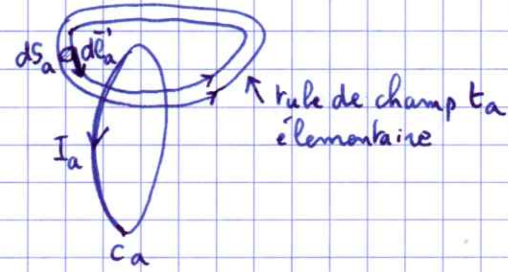
50. Sur une ligne de champ du tube : $\oint_{(C)} \vec{B}\cdot d\vec{r} > 0$



D'après le théorème d'Ampère, il y a une intensité positive qui traverse (C), donc le tube.

⇒ <u>le tube entoure une branche de circuit</u>

51. Energie magnétique contenue dans t_a :



$$dU_{msa} = \iiint_{\substack{\text{volume}\\ \text{de } t_a}} \frac{\vec{B}_a^{\,2}}{2\mu_0}\, d\tau$$

$$= \iiint_{\substack{\text{volume de}\\ t_a}} \frac{\vec{B}_a\cdot\vec{B}_a}{2\mu_0}\cdot d\vec{l}_a\cdot d\vec{S}_a \quad \text{(les 4 vecteurs sont parallèles)}$$

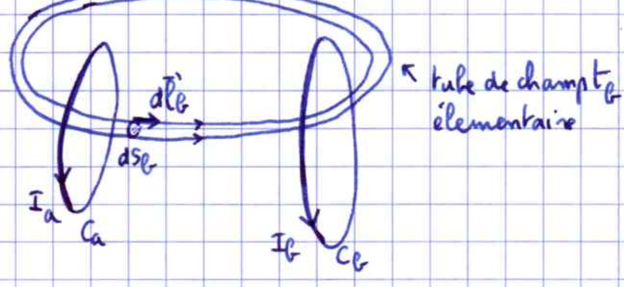
$$= \iiint_{\substack{\text{volume}\\ \text{de } t_a}} B_a\, dl_a \cdot \underbrace{B_a\, dS_a}_{= d\Phi_a \text{ constant le long du tube}} \cdot \frac{1}{2\mu_0}$$

$$= \frac{d\Phi_a}{2\mu_0} \underbrace{\int_{\substack{\text{longueur}\\ \text{du tube}}} B_a\, dl_a}_{= \mu_0 I_a \text{ d'après le théorème d'Ampère.}}$$

$$= \frac{1}{2} I_a\, d\Phi_a$$

En faisant la somme sur tous les tubes : $\boxed{U_{msa} = U_c^a = \frac{1}{2} I_a\, \Phi_{a\to a}}$

52. Energie magnétique d'interaction dans le tube t_b



$$dU_c^{a\leftrightarrow b} = \iiint_{\substack{\text{volume}\\ \text{de } t_b}} \frac{\vec{B}_a\cdot\vec{B}_b}{\mu_0}\, d\tau$$

$$= \iiint_{\substack{\text{volume}\\ \text{de } t_b}} \frac{\vec{B}_a\cdot\vec{B}_b\cdot d\vec{l}_b\cdot d\vec{S}_b}{\mu_0}$$

$$= \iiint_{\substack{\text{volume}\\ \text{de } t_b}} \frac{\vec{B}_b\cdot d\vec{l}_b}{\mu_0}\, \underbrace{\vec{B}_a\, d\vec{S}_b}_{d\Phi_{a\to b}}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} d\Phi_{a\to b} \underbrace{\int_{\substack{\text{longueur}\\ \text{du tube}}} \vec{B}_b\cdot d\vec{l}_b}_{= \mu_0 I_b \text{ d'après le théorème d'Ampère}}$$

$$= I_b\, d\Phi_{a\to b}$$

En faisant la somme sur tous les tubes t_b : $\boxed{U_c^{a\leftrightarrow b} = I_b\, \Phi_{a\to b}}$

Energie maximale si $\Phi_{a\to b}$ maximal ⇒ C_b doit être tout près de C_a

53. $U_c = \sum_a U_c^a + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} U_c^{a \leftrightarrow b}$

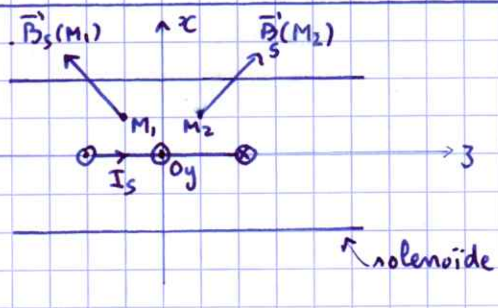
$= \frac{1}{2} \sum_a I_a \Phi_{a \to a} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} I_a \Phi_{b \to a}$

Que l'on peut regrouper en : $\boxed{U_c = \frac{1}{2} \sum_{a,b} I_a \Phi_{b \to a}}$ en incluant le cas $a = b$ dans la somme

Théorème de réciprocité : $U_c^{a \leftrightarrow b} = I_b \Phi_{a \to b} = I_a \Phi_{b \to a}$ ($\Rightarrow$ l'inductance mutuelle M est la même pour $a \to b$ et $b \to a$)

54. Les énergies propres toujours positives ne changent pas de signe si le courant change de signe
Les énergies d'interaction, de signe quelconque, changent de signe si le courant d'un des circuits change de signe.

55. Le plan Oxy est plan d'antisymétrie des courants dans la spire.



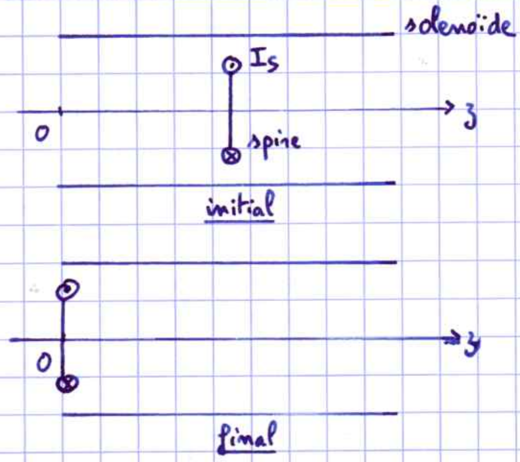
$\Rightarrow$ symétrie du champ magnétique $\vec{B}_s$ créé par la spire, par rapport à ce plan

$\Rightarrow$ deux spires du solenoïdes symétriques par rapport au plan Oxy vont être traversées par des flux opposés

$\Rightarrow \Phi_{spire \to solenoïde} = 0$

$\Rightarrow$ énergie magnétique d'interaction nulle

56. $W = -\Delta U^{sol \leftrightarrow spire} = U^{sol \leftrightarrow spire}_{initiale} - U^{sol \leftrightarrow spire}_{finale}$



• $U^{sol \leftrightarrow spire}_{initiale} = I_s \Phi^{initial}_{sol \to spire}$
$= I_s \mu_0 n I_0 . a^2$

• La relation $\Phi^{initial}_{sol \to spire} = \mu_0 n I_0 . a^2$ permet de déterminer l'inductance mutuelle entre le solenoïde et la spire à l'instant initial : $M_i = \mu_0 n a^2$

Par réciprocité : $\Phi^{initial}_{spire \to solenoïde} = \mu_0 n a^2 I_s$

La moitié de ce flux est envoyé dans la moitié droite du solenoïde, l'autre moitié est envoyé dans la moitié gauche du solenoïde

• Dans l'état final, la spire envoie donc la moitié de $\mu_0 n a^2 I_s$ dans le solenoïde.
Le nouveau coefficient d'inductance mutuelle est : $M_f = \frac{1}{2} \mu_0 n a^2$

Par réciprocité : $\Phi^{final}_{sol \to spire} = M_f I_0 = \frac{1}{2} \mu_0 n a^2 I_0$

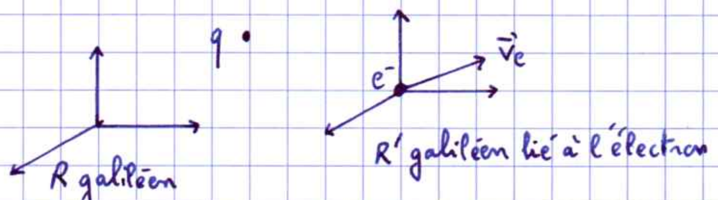
Puis : $U^{sol \leftrightarrow spire}_{finale} = I_s \Phi^{final}_{sol \to spire} = \frac{1}{2} \mu_0 n a^2 I_0 I_s$

On a donc : $\boxed{W = \frac{1}{2} \mu_0 n a^2 I_0 I_s}$

• ENS Ulm. Option PC. 2025 •

2.4 Energie propre des circuits magnétiques

57.



champ électromagnétique :
$(\vec{E}, \vec{B})$ dans R
$(\vec{E}', \vec{B}')$ dans R'

Soit une charge test q de vitesse $\vec{v}$ dans R et $\vec{v}'$ dans R'. On a : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$

Invariance de la force de Lorentz : $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$

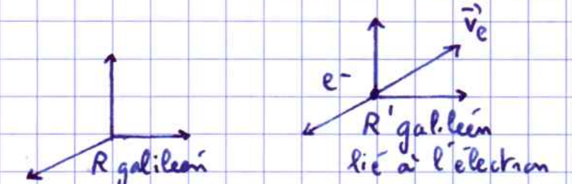
$$\vec{E} + \vec{v}' \wedge \vec{B} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

Cela doit être vrai quelle que soit $\vec{v}'$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \vec{E}' \\ \vec{B} = \vec{B}' \end{cases}$

Or l'électron est immobile dans R', il ne crée pas de champ magnétique : $\vec{B}' = \vec{0}$

D'où : $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$ C'est paradoxal car l'électron est une charge mobile dans R, il constitue un courant donc devrait créer un champ magnétique.

58.



dans R' : $\vec{B}' = \vec{0}$ car électron fixe

$$\vec{E}' = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}'_{/\!/} = -\frac{e\,\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3 v_e^2}\vec{v}_e \quad \text{et} \quad \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}' - \vec{E}'_{/\!/} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\vec{v}_e\right)$$

Les formules (33) donnent : $\vec{B}_{/\!/} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_{\perp} = \vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}_e \wedge \vec{E}$ (relations 2 et 4)

$$\vec{E}_{/\!/} = -\frac{e\,\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3 v_e^2}\vec{v}_e \qquad \text{(relation 1)}$$

Puis : $-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\vec{v}_e\right) = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\vec{E}_\perp + \vec{v}_e \wedge \frac{1}{c^2}(\vec{v}_e \wedge \vec{E})\right)$ (relation 3)

$$\simeq \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2}\right)\left(\vec{E}_\perp + \frac{1}{c^2}\vec{v}_e \wedge (\vec{v}_e \wedge \vec{E}_\perp)\right) \quad \text{car } \vec{v}_e \wedge \vec{E}_{/\!/} = \vec{0}$$

$$= \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2}\right)\left(\vec{E}_\perp + \frac{1}{c^2}\left[\underbrace{(\vec{v}_e\cdot\vec{E}_\perp)}_{=0}\vec{v}_e - v_e^2\vec{E}_\perp\right]\right)$$

$$= \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2}\right)\left(\vec{E}_\perp - \frac{v_e^2}{c^2}\vec{E}_\perp\right) = \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2}\right)\left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)\vec{E}_\perp$$

Si on reste à l'ordre 1 en $\frac{v_e}{c}$: $\vec{E}_\perp \simeq \vec{E}'_{/\!/} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\cdot\vec{v}_e\right)$

Finalement : $\boxed{\vec{E} = -\frac{e\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$

Puis : $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}_e \wedge \left(-\frac{e\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)$ or $\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0$ donc : $\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi r^3}\vec{v}_e \wedge \vec{r}}$

59 - $U_m^e = \iiint_{espace} \frac{\vec{B}'^2}{2\mu_0} d\tau$

On a : $\vec{B}'^2 = \frac{\mu_0^2 e^2}{16\pi^2 r^6} v_e^2 r^2 . K$ K : facteur numérique proche de l'unité venant du $\sin\theta$ du produit vectoriel $\vec{v_e} \wedge \vec{r}$

Donc : $U_m^e = \iiint_{espace} \frac{\mu_0 e^2 K}{32\pi^2 r^4} v_e^2 r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$= K \frac{\mu_0 e^2}{32\pi^2} v_e^2 4\pi \int_{r_e}^{+\infty} \frac{dr}{r^2}$

$= K \frac{\mu_0 e^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{r_e} \cdot v_e^2$

$= K \underbrace{\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 r_e}}_{m_e} v_e^2 = K m_e v_e^2 = \underbrace{2K}_{=\lambda} E_c$ $=\lambda$ facteur numérique de l'ordre de l'unité

On a bien : $\boxed{U_m^e = \lambda E_c}$

60 . $E_c^{rot} = N_{elec} \cdot \frac{1}{2} m_e v_e^2$ où N_{elec} est le nombre total d'électrons

On a : $I = j \cdot \pi a^2 = -n_e e v_e \pi a^2 \Rightarrow v_e^2 = \frac{I^2}{n_e^2 e^2 (\pi a^2)^2}$

Et : $N_{elec} = n_e \cdot$ volume de spires $= n_e \cdot N \cdot 2\pi R \cdot \pi a^2$

D'où : $\boxed{E_c^{rot} = \frac{N m_e R I^2}{n_e e^2 a^2}}$

61 . A.N : $E_c^{rot} = \underline{4,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}}$

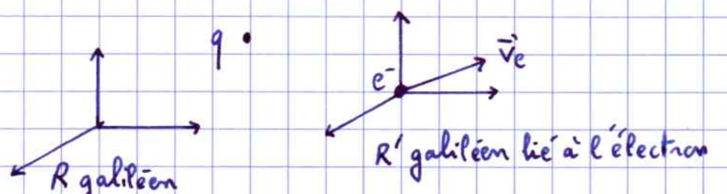
Puis : $U_{mag} = \iiint_{solenoïde} \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} d\tau = \frac{1}{2} \frac{(\mu_0 n I)^2}{\mu_0} \cdot \pi R^2 L = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{N}{L}\right)^2 I^2 \pi R^2 L$

A.N : $U_{mag} = \underline{9,9 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$

62 . ?

2.4 Energie propre des circuits magnétiques

57.



champ électromagnétique :
$(\vec{E}, \vec{B})$ dans R
$(\vec{E}', \vec{B}')$ dans R'

Soit une charge test q de vitesse $\vec{v}$ dans R et $\vec{v}\,'$ dans R'. On a : $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_e$

Invariance de la force de Lorentz : $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}\,' \wedge \vec{B}')$

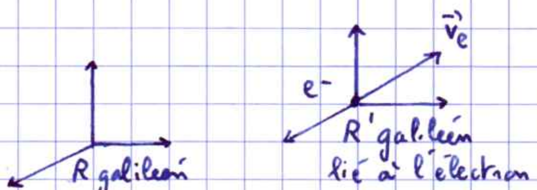
$$\vec{E} + \vec{v}\,' \wedge \vec{B} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}\,' \wedge \vec{B}'$$

Cela doit être vrai quelle que soit $\vec{v}\,'$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \vec{E}' \\ \vec{B} = \vec{B}' \end{cases}$

Or l'électron est <u>immobile dans R'</u>, il ne crée pas de champ magnétique : $\vec{B}' = \vec{0}$

D'où : $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$ C'est paradoxal car l'électron est une charge mobile dans R, il constitue un courant donc devrait créer un champ magnétique.

58.



dans R' : $\vec{B}' = \vec{0}$ car électron fixe

$$\vec{E}' = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}'_{/\!/} = -\frac{e\,\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3 v_e^2}\vec{v}_e \quad \text{et} \quad \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}' - \vec{E}'_{/\!/} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\vec{v}_e\right)$$

Les formules (33) donnent : $\vec{B}_{/\!/} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_{\perp} = \vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}_e \wedge \vec{E}$ (relations 2 et 4)

$$\vec{E}_{/\!/} = -\frac{e\,\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3 v_e^2}\vec{v}_e \qquad \text{(relation 1)}$$

Puis : $-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\vec{v}_e\right) = \left(1-\frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_e \wedge \frac{1}{c^2}(\vec{v}_e \wedge \vec{E})\right)$ (relation 3)

$$\simeq \left(1+\frac{v_e^2}{2c^2}\right)\left(\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c^2}\vec{v}_e \wedge (\vec{v}_e \wedge \vec{E}_{\perp})\right) \quad \text{car } \vec{v}_e \wedge \vec{E}_{/\!/} = \vec{0}$$

$$= \left(1+\frac{v_e^2}{2c^2}\right)\left(\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c^2}\Big[\underbrace{(\vec{v}_e\cdot\vec{E}_{\perp})}_{=0}\vec{v}_e - v_e^2\vec{E}_{\perp}\Big]\right)$$

$$= \left(1+\frac{v_e^2}{2c^2}\right)\left(\vec{E}_{\perp} - \frac{v_e^2}{c^2}\vec{E}_{\perp}\right) = \left(1+\frac{v_e^2}{2c^2}\right)\left(1-\frac{v_e^2}{c^2}\right)\vec{E}_{\perp}$$

Si on reste à l'ordre 1 en $\frac{v_e}{c}$: $\vec{E}_{\perp} \simeq \vec{E}'_{/\!/} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\cdot\vec{v}_e\right)$

Finalement : $\boxed{\vec{E} = -\frac{e\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$

Puis : $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}_e \wedge \left(-\frac{e\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)$ or $\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0$ donc : $\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi r^3}\vec{v}_e \wedge \vec{r}}$

59- $U_m^e = \iiint_{espace} \frac{\vec{B}'^2}{2\mu_0} d\tau$

On a : $\vec{B}'^2 = \frac{\mu_0^2 e^2}{16\pi^2 r^6} v_e^2 r^2 . K$ K : facteur numérique proche de l'unité venant du $\sin\theta$ du produit vectoriel $\vec{v_e} \wedge \vec{r}$

Donc : $U_m^e = \iiint_{espace} \frac{\mu_0 e^2 K}{32\pi^2 r^4} v_e^2 r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$= K \frac{\mu_0 e^2}{32\pi^2} v_e^2 4\pi \int_{r_e}^{+\infty} \frac{dr}{r^2}$

$= K \frac{\mu_0 e^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{r_e} \cdot v_e^2$

$= K \underbrace{\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 r_e}}_{m_e} v_e^2 = K m_e v_e^2 = \underbrace{2K}_{=\lambda \text{ facteur numérique de l'ordre de l'unité}} E_c$

On a bien : $\boxed{U_m^e = \lambda E_c}$

60 - $E_c^{rot} = N_{elec} \cdot \frac{1}{2} m_e v_e^2$ où N_{elec} est le nombre total d'électrons

On a : $I = j \cdot \pi a^2 = -n_e e v_e \pi a^2 \Rightarrow v_e^2 = \frac{I^2}{n_e^2 e^2 (\pi a^2)^2}$

Et : $N_{elec} = n_e \cdot$ volume de spires $= n_e \cdot N \cdot 2\pi R \cdot \pi a^2$

D'où : $\boxed{E_c^{rot} = \frac{N m_e R I^2}{n_e e^2 a^2}}$

61. A.N : $E_c^{rot} = \underline{4,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}}$

Puis : $U_{mag} = \iiint_{solenoïde} \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} d\tau = \frac{1}{2} \frac{(\mu_0 n I)^2}{\mu_0} \cdot \pi R^2 L = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{N}{L}\right)^2 I^2 \pi R^2 L$

A.N : $U_{mag} = \underline{9,9 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$

62. ?