XE . Physique A . Option PC . 2025

Questions préliminaires de mécanique

1 . Principe fondamental de la dynamique à la particule : $m\vec{a} = q\vec{E}$ (dans R galiléen)

Selon Ox : $m\ddot{x} = qE_0$

$\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{q}{m}E_0 t + v_0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E_0 t^2 + v_0 t + 0$

Selon Oy et Oz : $\ddot{y} = 0$ et $\ddot{z} = 0$

$\Rightarrow \quad y = 0$ et $z = 0$

Finalement : $\boxed{\vec{r} = \left(\frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 + v_0 t\right)\vec{u}_x}$

2 . En remplasant t par $-t$ et v_0 par $-v_0$, on retrouve la même escpression .
Il y a invariance par renversement du temps.

3 . On a maintenant : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -K\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_0\, e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{m}{K}$

Puis : $\boxed{\vec{r} = \tau\vec{v}_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

4 . On a alors : $\vec{r} = -\tau\vec{v}_0\left(1 - e^{t/\tau}\right)$ Il n'y a pas invariance par renversement du temps

5 . La force électrique est conservative, alors que la force de frottement est dissipative.

Mathématiquement, la différence de comportement vient de l'absence de terme en $\dot{x}$ dans l'équation différentielle de la question 1, alors qu'il y en a un dans celle de la question 3.

Ondes et renversement du temps

6 . Equation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$

On change t en $-t$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,-t) = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial (-t)^2}(x,-t) \qquad$ or $\partial(-t)^2 = \partial t^2$

Donc : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,-t) = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,-t)$

On obtient la même équation de D'Alembert donc $u(x,-t)$ est aussi solution.
Cela signifie que la propagation décrite par cette équation est réversible.

7 . Pour $x > 0$: $u_0(x, t>0) = s\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$ onde progressive selon $+\vec{u}_x$

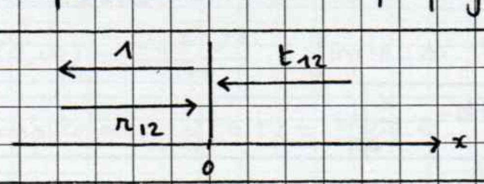
Pour $x < 0$: $u_0(x, t>0) = s\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$ onde progressive selon $-\vec{u}_x$

8 . Pour $x > 0$: $u_0(x, t'=-t) = s\left(-t' - \frac{x}{c_0}\right)$ onde progressive selon $-\vec{u}_x$

$u_0(x, t'=-t) = s\left(-t' + \frac{x}{c_0}\right)$ onde progressive selon $+\vec{u}_x$

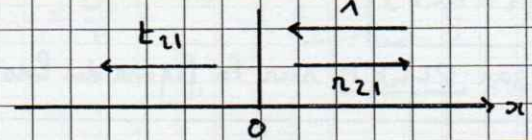
De chaque côté, le sens de propagation a changé par inversion du temps

9 _ 10

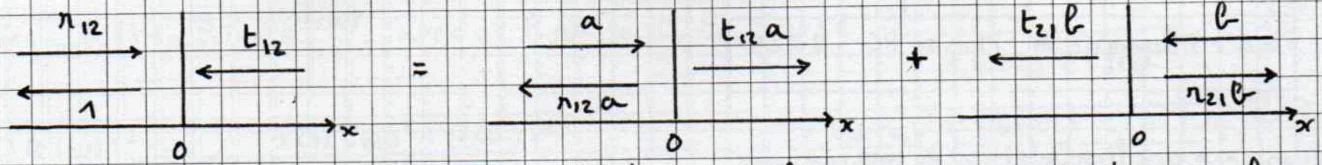


Deux ondes incidentes
Une onde qui repart

11 . Situation duale :



On va considérer la situation inversée temporellement comme la superposition de la situation initiale et de la situation duale



situation inverseé — situation initiale — situation duale

en identifiant les ondes terme à terme :
- $r_{12} = a$
- $1 = r_{12}a + t_{21}b$
- $t_{12} = b$
- $0 = t_{12}a + r_{21}b$

d'où : $\begin{cases} 1 = r_{12}^2 + t_{12}t_{21} \\ 0 = t_{12}r_{12} + r_{21}t_{12} \end{cases} \Rightarrow \boxed{r_{21} = -r_{12} \quad t_{21} = \dfrac{1 - r_{12}^2}{t_{12}}}$

12. En optique, on a : $r_{12} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t_{12} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$. De même : $r_{21} = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$ et $t_{21} = \dfrac{2n_2}{n_1 + n_2}$

On a bien : $r_{12} = -r_{21}$

Et : $\dfrac{1 - r_{12}^2}{t_{12}} = \dfrac{n_1 + n_2}{2n_1}\left(1 - \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2\right) = \dfrac{n_1 + n_2}{2n_1}\left(\dfrac{(n_1+n_2)^2 - (n_1 - n_2)^2}{(n_1+n_2)^2}\right) = \dfrac{2n_1n_2 - (-2n_1n_2)}{2n_1(n_1+n_2)}$

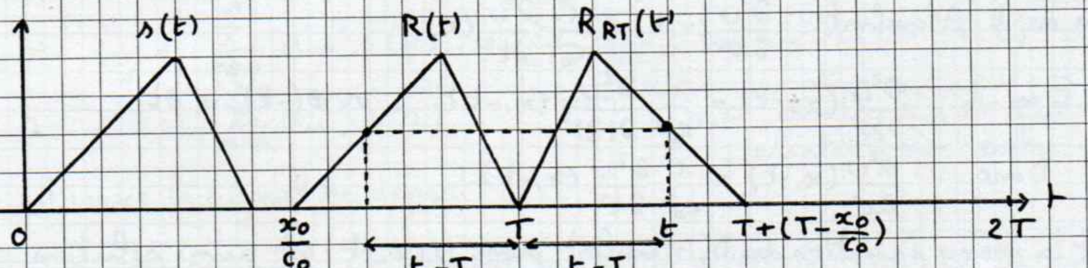
On a bien : $\dfrac{1 - r_{12}^2}{t_{12}} = \dfrac{2n_2}{n_1 + n_2} = t_{21}$

Les relations sont vérifiées.

Miroir à retournement temporel en milieu homogène

13. $\boxed{R(t) = s\left(t - \dfrac{x_0}{c_0}\right)}$

14.



15. $R_{RT}(t) = R(T - (t - T)) = R(2T - t) = s\left(2T - t - \dfrac{x_0}{c_0}\right)$

Donc : $R_{RT}(t) = s(t')$ avec $\boxed{t' = 2T - t - \dfrac{x_0}{c_0}}$

16. $U_{RT}(x,t) = R_{RT}\left(t - \dfrac{x_0 - x}{c_0}\right)$

$= s\left(2T - \left(t - \dfrac{x_0 - x}{c_0}\right) - \dfrac{x_0}{c_0}\right)$

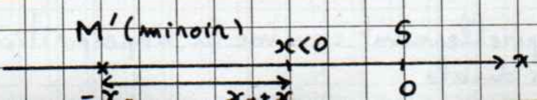
$= s\left(2T - t - \dfrac{x}{c_0}\right)$

Donc : $U_{RT}(x,t) = s(t')$ avec $\boxed{t' = 2T - t - \dfrac{x}{c_0}}$

17. $\boxed{s_{RT}(t) = U_{RT}(0,t) = s(2T - t)}$

Ce signal est représenté par <u>OLLEH</u> sur la figure du bas

18.



$R'(t) = s\left(t + \dfrac{(-x_0)}{c_0}\right) = s\left(t - \dfrac{x_0}{c_0}\right)$

XE - Physique A - Option PC - 2025

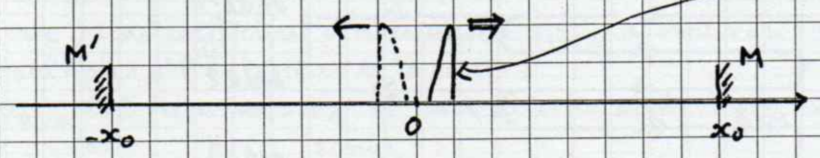
Puis $R'_{RT}(t) = R'(T-(t-T)) = R'(2T-t) = s\left(2T - t - \frac{x_0}{c_0}\right)$

Puis : $u'_{RT}(x,t) = R'_{RT}\left(t - \frac{x+x_0}{c_0}\right) = s\left(2T - \left(t - \frac{x+x_0}{c_0}\right) - \frac{x_0}{c_0}\right) = s\left(2T - t + \frac{x}{c_0}\right)$

Finalement : $u_{RT_2}(x,t) = u_{RT}(x,t) + u'_{RT}(x,t)$

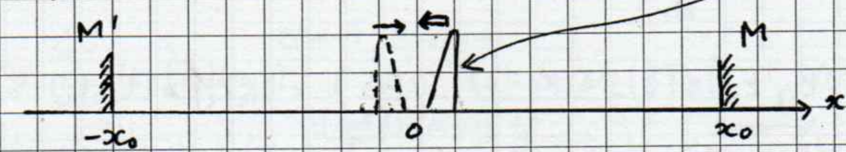
Soit : $\boxed{u_{RT_2}(x,t) = s\left(2T - t - \frac{x}{c_0}\right) + s\left(2T - t + \frac{x}{c_0}\right)}$.

19. A $t = 0^+$:



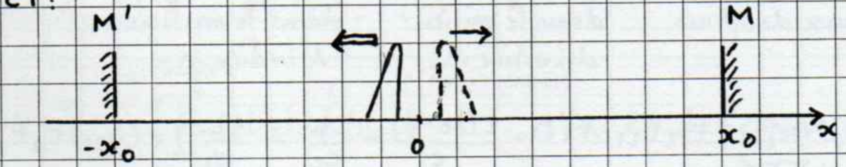
ce qui arrive en premier sur M est réémis en dernier

Un peu avant 2T :



solution anti-causale (convergence vers la source)

Un peu après 2T :



solution causale (divergence à partir de la source)

20. Il faudrait absorber les ondes convergeant vers la source ou les neutraliser par interférences destructives

21. On a : $\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\,u(r,t))}{\partial r^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r,t)}$

22. En régime monochromatique : $\frac{1}{r}\frac{d^2(r\,\underline{u}(r,\omega))}{dr^2} = -\frac{\omega^2}{c_0^2}\underline{u}(r,\omega)$

Soit : $\boxed{\frac{d^2}{dr^2}(r\,\underline{u}(r,\omega)) + \frac{\omega^2}{c_0^2}(r\,\underline{u}(r,\omega)) = 0}$

23. Solution : $r\,\underline{u}(r,\omega) = U_c\, e^{-ikr} + U_d\, e^{ikr}$ avec : $k = \frac{\omega}{c_0}$

onde convergente : $\boxed{\underline{u}_c(r,\omega) = \frac{\underline{U}_c}{r} e^{-ikr}}$ $\left(e^{-i(kr+\omega t)}\right.$ propagation selon $-\vec{u}_r)$

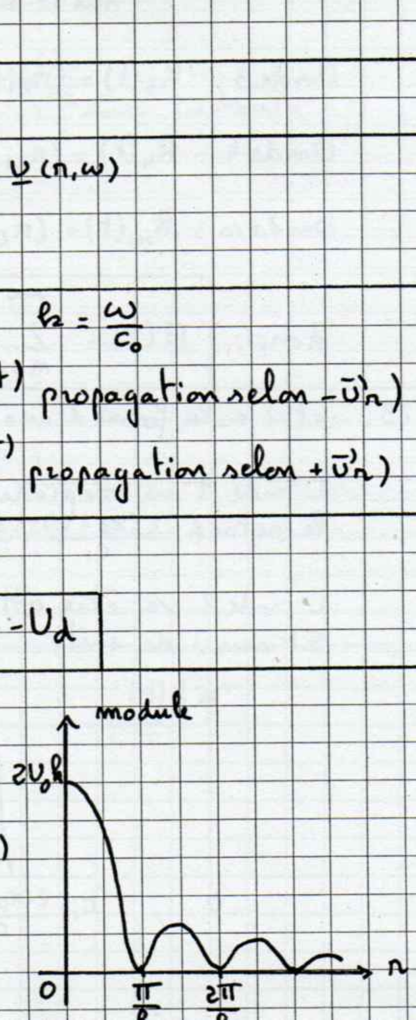
onde divergente : $\boxed{\underline{u}_d(r,\omega) = \frac{\underline{U}_d}{r} e^{ikr}}$ $\left(e^{i(kr-\omega t)}\right.$ propagation selon $+\vec{u}_r)$

24. $\underline{u}(r,\omega) = \frac{1}{r}\left(U_c e^{-ikr} + U_d e^{ikr}\right)$

$\underline{u}(0,\omega) = \frac{U_c + U_d}{r}$ finie si $U_c + U_d = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{U_c = -U_d}$

25. Champ total : $\underline{u}(r,t) = \frac{U_0}{r}\left(e^{-i(kr+\omega t)} - e^{i(kr-\omega t)}\right)$

$= \frac{U_0}{r} e^{-i\omega t}\underbrace{\left(e^{-ikr} - e^{ikr}\right)}_{= -2i\sin(kr)}$



Le module est : $|\underline{u}(r,t)| = \frac{2U_0}{r}\sin(kr)$

Longueur caractéristique : $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$

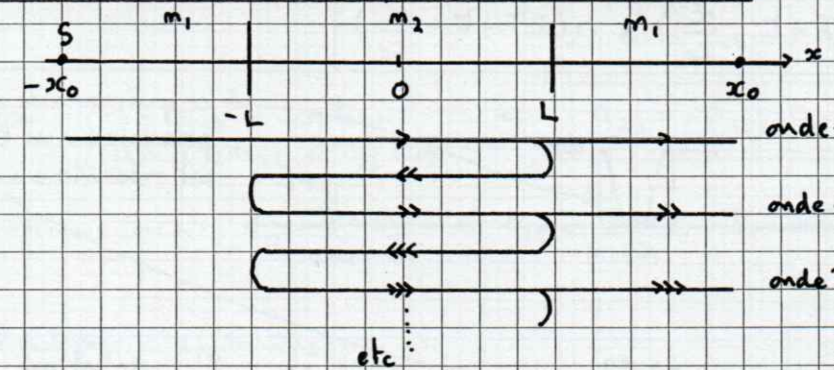
26. Le signal n'est pas concentré sur le point O mais plutôt dans une sphère de rayon $\frac{\lambda}{2}$. On retrouve la limite de la diffraction. Elle intervient dans le pouvoir de résolution des instruments d'optique.

27. Nombre de capteurs :

$$N = \frac{4\pi(10\lambda)^2}{\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)} = 16.\pi.100 \rightarrow \underline{N \simeq 5000}$$

Miroir à renversement du temps en milieu réverbérant

28.



$$\text{Onde 1 : } R_1(t) = \underbrace{t_{12}.t_{21}}_{\substack{\text{transmission}\\ \text{à travers les}\\ \text{deux dioptres}}}\, s\Big(t - \underbrace{\frac{2(x_0-L)}{c_1}}_{\substack{\text{temps de}\\ \text{propagation}\\ \text{dans le milieu}\\ \text{d'indice } n_1}} - \underbrace{\frac{2L}{c_2}}_{\substack{\text{temps de}\\ \text{propagation}\\ \text{dans le milieu}\\ \text{d'indice } n_2}}\Big) = t_{12}t_{21}\, s(t - t_1) \text{ où } t_1 = \frac{2(x_0-L)}{c_1} + \frac{2L}{c_2}$$

$$\text{Onde 2 : } R_2(t) = \underbrace{(r_{21})^2}_{\substack{\text{deux réflexions}\\ \text{sur le dioptre } n_2/n_1}} t_{12}t_{21}\, s\Big(t - \frac{2(x_0-L)}{c_1} - \frac{2L}{c_2} - \underbrace{\frac{4L}{c_2}}_{\substack{\text{temps de propagation}\\ \text{pour l'aller et retour dans la cavité}}}\Big) = (r_{21})^2 t_{12}t_{21}\, s\Big(t - t_1 - \frac{4L}{c_2}\Big)$$

$$\text{Onde 3 : } R_3(t) = (r_{21})^4 t_{12}t_{21}\, s\Big(t - \frac{2(x_0-L)}{c_1} - \frac{2L}{c_2} - \frac{8L}{c_2}\Big)$$

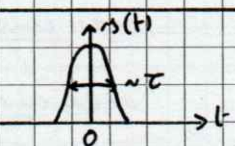
$$\text{Onde 4 : } R_4(t) = (r_{21})^6 t_{12}t_{21}\, s\Big(t - \frac{2(x_0-L)}{c_1} - \frac{2L}{c_2} - \frac{12L}{c_2}\Big)$$

$\vdots$

$$\text{Onde } m : R_m(t) = (r_{21})^{2(m-1)} t_{12}t_{21}\, s\Big(t - \frac{2(x_0-L)}{c_1} - \frac{2L}{c_2} - \frac{(m-1)4L}{c_2}\Big)$$

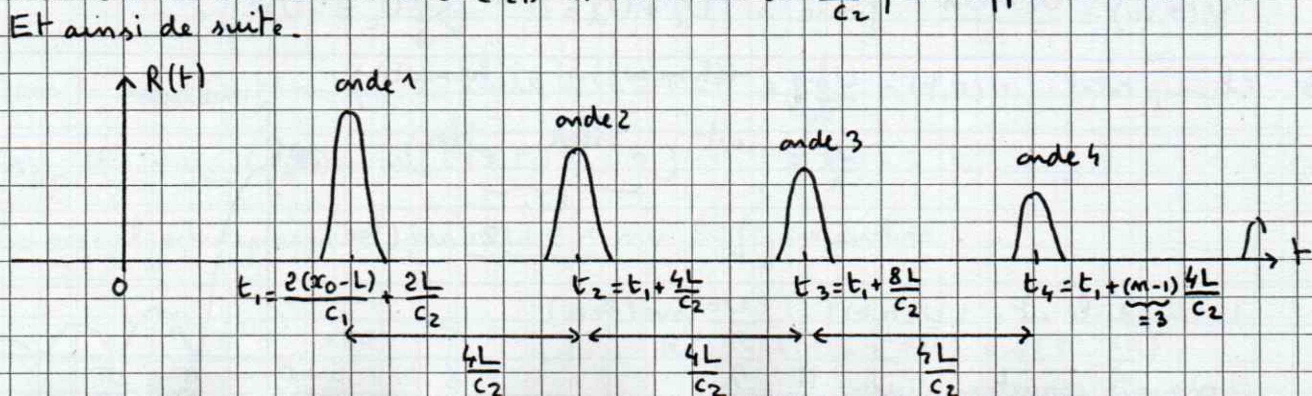
$$\text{donc : } \boxed{R(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} (r_{21})^{2(m-1)} t_{12}t_{21}\, s\Big(t - \frac{2(x_0-L)}{c_1} - \frac{2L}{c_2} - \frac{(m-1)4L}{c_2}\Big)}$$

29. $s(t)$ a la forme d'une impulsion gaussienne de largeur de l'ordre de τ



L'onde 1 va reproduire ce signal avec une atténuation et le retard $\frac{2(x_0-L)}{c_1} + \frac{2L}{c_2}$ dû à la propagation

L'onde 2 va être atténuée de $(r_{21})^2$ et retardée de $\frac{4L}{c_2}$ par rapport à l'onde 1.
Et ainsi de suite.



XE - Physique A. Option PC. 2025

30 - Le signal $R(t)$ reçu à l'instant t va être réémis à l'instant $2T - t$ (cf question 15)

Signal réémis : $R_{RT}(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} (r_{21})^{2(m-1)}\, t_{12}t_{21}\, s\Big(2T - t \underbrace{- \frac{2(x_0-L)}{c_1} - \frac{2L}{c_2}}_{=-t_1} - (m-1)\frac{4L}{c_2}\Big)$

L'onde réémise numéro m : $R_{RT_m}(t) = (r_{21})^{2(m-1)}\, t_{12}t_{21}\, s\big(2T - t - t_1 - (m-1)\frac{4L}{c_2}\big)$

va jouer le rôle du signal $s(t)$ de la question 29. Cette onde numéro m va faire le chemin inverse (donc coefficient d'atténuation $t_{12}t_{21}$ à nouveau) en donnant les réflexions multiples à l'intérieur de la cavité.
Le signal $s_{RT_m}(t)$ reçu en $-x_0$ et issu de cette onde R_{RT_m} est :

$$s_{RT_m}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (t_{12}t_{21})(r_{21})^{2(n-1)}\, R_{RT_m}\Big(t - \big(t_1 + (n-1)\frac{4L}{c_2}\big)\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (t_{12}t_{21})(r_{21})^{2(n-1)}\,(r_{21})^{2(m-1)}(t_{12}t_{21})\, s\Big(2T - \big(t - t_1 - (n-1)\frac{4L}{c_2}\big) - t_1 - (m-1)\frac{4L}{c_2}\Big)$$

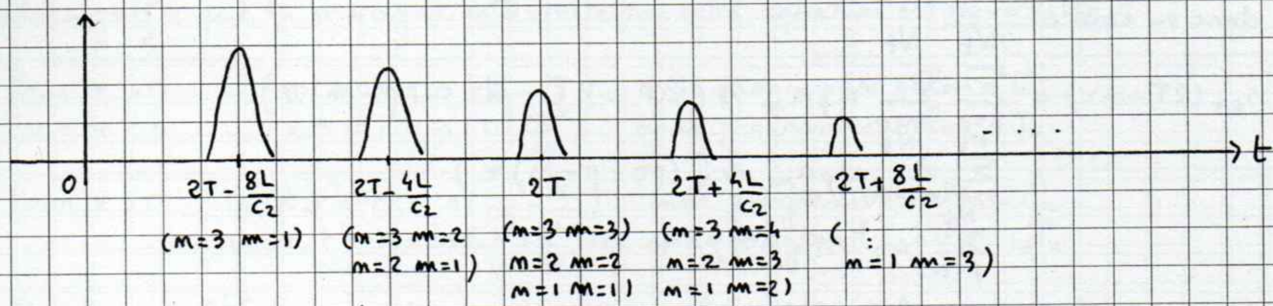
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (t_{12}t_{21})^2 (r_{21})^{2[(m-1)+(n-1)]}\, s\Big(2T - t + (n-m)\frac{4L}{c_2}\Big)$$

Finalement : $s_{RT}(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} s_{RT_m}(t)$

Soit : $$\boxed{s_{RT}(t) = \sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (t_{12}t_{21})^2 (r_{21})^{2[(m-1)+(n-1)]}\, s\Big(2T - t + (n-m)\frac{4L}{c_2}\Big)\Big)}$$

L'onde $R_m(t)$ arrive en x_0 à l'instant $t_m = t_1 + (m-1)\frac{4L}{c_2}$
Elle est réémise en x_0 à l'instant $2T - t_m$
Elle revient en $-x_0$ à l'instant $2T - t_m + t_1 = 2T - (m-1)\frac{4L}{c_2}$
Ses multiples issus des réflexions internes reviennent en $-x_0$ aux instants $2T - t_m + t_n = 2T - (m-n)\frac{4L}{c_2}$

On aura à peu près l'allure suivante pour $s_{RT}(t)$:



On obtient un signal plus complexe que $s(t)$

31 - $\underline{R}(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} (r_{21}^2)^{m-1}\, t_{12}t_{21}\, \underline{S}(\omega)\, e^{-i\omega\left(t - t_1 - \frac{4L}{c_2}(m-1)\right)}$

$$= t_{12}t_{21}\,\underline{S}(\omega)\, e^{-i\omega(t-t_1)} \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty}\left(r_{21}^2\, e^{+i\frac{4L\omega}{c_2}}\right)^{m-1}}_{= \frac{1}{1 - r_{21}^2 e^{i\frac{4L\omega}{c_2}}}}$$

Donc : $\underline{R}(t) = \underline{R}(\omega) e^{-i\omega t}$ avec : $\boxed{\underline{R}(\omega) = t_{12} t_{21} \underline{S}(\omega) e^{i\omega t_1} \dfrac{1}{1 - r_{12}^2 e^{i\frac{4L\omega}{c_2}}}}$

32. $|\underline{R}(\omega)|^2 = \dfrac{(t_{12}t_{21})^2 |\underline{S}(\omega)|^2}{(1 - r_{12}^2 e^{i\frac{4L\omega}{c_2}})(1 - r_{12}^2 e^{-i\frac{4L\omega}{c_2}})} = \dfrac{(t_{12}t_{21})^2 |\underline{S}(\omega)|^2}{1 + r_{12}^4 - 2r_{12}^2 \cos\left(\frac{4L\omega}{c_2}\right)}$

Il y a résonance si le dénominateur est minimal $\Rightarrow \cos\left(\frac{4L\omega}{c_2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{4L\omega}{c_2} = p\, 2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$

Donc : $\frac{4L}{c_2} \cdot 2\pi f = p\, 2\pi \rightarrow \boxed{f_{res_p} = p \frac{c_2}{4L}}$ p entier

On a : $\lambda_p = \frac{c_2}{f_{res p}} = \frac{4L}{p} \rightarrow \boxed{4L = p\lambda_p}$ L'aller et retour dans la cavité est un multiple de λ_p

33. Un signal initial quelconque peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux de différentes fréquences. Or la cavité joue le rôle de filtre qui sélectionne certaines fréquences f_p. Le signal ne sera donc pas reconstitué à l'identique.

34. $R(t) = \sum_{n=0}^{N_t} R_n(t)$ avec $R_n(t) = a_n s(t - t_0 - n\tau)$

$R_n(t)$ est réémis à l'instant $2T - t$: $R_{RTn}(t) = a_n s(2T - t - t_0 - n\tau)$

Puis : $s_{RT_n}(t) = \sum_{m=0}^{N_t} a_m a_n s(2T - (t - t_0 - n\tau) - m\tau - t_0)$ (même modification qu'à l'aller)

$= \sum_{m=0}^{N_t} a_m a_n s(2T - t - (m-n)\tau)$

Enfin : $\boxed{s_{RT}(t) = \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{m=0}^{N_t} a_m a_n s(2T - t - (m-n)\tau)}$

35.

$s_{RT}(2T) = \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{m=0}^{N_t} a_n a_m s((m-n)\tau)$ → on distingue $n = m$ et $n \neq m$

$= \sum_{n=0}^{N_t} a_n^2 s(0) + \underbrace{\sum_{n=0}^{N_t} \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq n}} a_n a_m s((m-n)\tau)}_{=0}$

$= \left(\sum_{n=0}^{N_t} a_n^2\right) s(0)$ $= 0$ car les a_n et a_m varient aléatoirement entre -1 et +1

<u>On retrouve le signal de départ</u>

36. Le n de $t = 2T + n\tau$ est a priori un entier différent du n de la somme de s_{RT}, donc on écrit :

$s_{RT}(2T + n\tau) = \sum_{p=0}^{N_t} \sum_{m=0}^{N_t} a_p a_m s(2T - 2T - n\tau - (p-m)\tau)$

$= \sum_{p=0}^{N_t} \sum_{m=0}^{N_t} a_p a_m s((m - p - n)\tau)$

$= \sum_{p=0}^{N_t} a_p^2 s(-n\tau) + 0$

Or $s(t)$ est une impulsion brève de durée τ, donc $s(-n\tau) = 0$

Donc : $\boxed{s_{RT}(2T + n\tau) = 0}$

37. Il n'y a plus de signaux parasites. On obtient juste à un facteur près $s(0)$ reconstitué à l'instant $2T$.