

# Devoir Surveillé n° 7.

## le 6 mars.

### Exercice 1

On note  $f$  la fonction définie sur  $]0, 1[$  par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}.$$

**Q1.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt.$$

**Q2.** Justifier que la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0, 1[$ , puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

### Exercice 2

On note  $I = ]0; +\infty[$  et on définit pour  $n$  entier naturel non nul et pour  $x \in I$ ,  $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ .

**Q3.** Justifier que pour tout entier naturel non nul  $n$ , les fonctions  $f_n$  sont intégrables sur  $I$  et calculer  $\int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx$ . Que vaut alors la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx \right)$  ?

**Q4.** Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $I$ . Déterminer sa fonction somme  $S$  et démontrer que  $S$  est intégrable sur  $I$ . Que vaut alors  $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \, dx$  ?

**Q5.** Donner, sans aucun calcul, la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \left( \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, dx \right)$ .

# Problème

Dans tout le problème,  $\alpha$  est un réel appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$ . On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

## Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

**Q6.** Démontrer que  $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et sur  $[1, +\infty[$ .

**Q7.** Démontrer que  $J(\alpha) = I(1-\alpha)$ .

On se propose maintenant d'écrire  $I(\alpha)$  sous forme d'une somme de série.

**Q8.** 1<sup>re</sup> tentative

Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on pose  $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$ . Montrer que :

$$\forall x \in ]0, 1[, \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, 1[$ ?

**Q9.** 2<sup>e</sup> tentative

Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$$

En déduire une expression de  $I(\alpha)$  sous forme d'une somme de série.

**Q10.** En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

**Q11.** Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

## Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt$$

**Q12.** Démontrer que  $\Gamma$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .

**Q13.** Démontrer que  $f_\alpha$  est bien définie et continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Q14.** Démontrer que  $f_\alpha$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer sa dérivée.

**Q15.** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ .

**Q16.** Démontrer que  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$$

## Partie III - Vers la formule des compléments

**Q17.** Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

**Q18.** Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Vérifier que  $g_\alpha$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ .

En déduire que :  $\forall x \in ]0, +\infty[, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ .

**Q19.** En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$$

**Q20.** Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

**Q21.** En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$