Corrigé du DS 7

Exercice 1 : ccinp 2021 maths 1 exo 1

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2-1}.$$

Q1. La fonction $t \mapsto -t^{2k}\ln t$ est positive et continue sur l'intervalle $]0\,;1]$, son intégrale existe donc dans $[0\,;+\infty]$ et par intégration par parties avec

$$\begin{cases} f(t) = \frac{t^{2k+1}}{2k+1} & g(t) = -\ln t \\ f'(t) = t^{2k} & g'(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$$
$$t^{2k+1}\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{(croissances comparées)}$$

$$\begin{aligned} I_k &= 0 + \frac{1}{2k+1}\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2k+1)^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Donc : $\int_0^1 -t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t$ converge, donc par linéarité,

$$\boxed{\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t \text{ converge et } I_k = \int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(2k+1)^2}.}$$

Q2. $f \in \mathcal{C}(]0\,;1[)$ et :

$$f(t) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln t \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est une fonction de Riemann intégrable en 0, donc par comparaison, f est intégrable en 0.
Et

$$f(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 0,$$

donc f est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable en 1.
Donc : f est intégrable sur $]0\,;1[$.

De plus, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Donc pour tout $t \in\,]0\,;1[$, comme $t^2 \in\,]-1\,;1[$:

$$f(t) = -\ln t \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-t^{2k}\ln t).$$

On pose, pour tout $k\in\mathbb{N}, u_k : t \mapsto -t^{2k}\ln t$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k est continue et positive sur $]0\,;1[$ et la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement vers la fonction f qui est continue par morceaux sur $]0\,;1[$. Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 u_k(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} -I_k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par sommation par paquets d'une famille sommable :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est intégrable sur }]0,1[\text{et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.}$$

Exercice 2 : ccinp 2015 maths 1 exo 2

On note $I =]0\,;+\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx}$.

Q3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le cours, $x \mapsto e^{-nx}$ et $x \mapsto e^{-2nx}$ sont intégrables sur $[0\,;+\infty[$, donc sur $]0\,;+\infty[$. Donc par linéarité de l'intégrale, f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{+\infty} e^{-2nx}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} - 2\left[\frac{-e^{-2nx}}{2n}\right]_0^{+\infty}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n\text{, les fonctions } f_n \text{ sont intégrables sur } I,\ \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.}$$

Q4. Soit $x \in I$.

$$\sum e^{-nx} = \sum \left(e^{-x}\right)^n$$

est sune somme géométrique de raison $e^{-x} \in]0\,;1[$ (car $x \in]0\,;+\infty[$), donc cette série converge. Et de même

$$\sum e^{-2nx} = \sum \left(e^{-2x}\right)^n$$

est sune somme géométrique de raison $e^{-2x} \in]0\,;1[$ (car $2x \in]0\,;+\infty[$), donc cette série converge. Donc $\sum f_n$ converge simplement sur I et pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) &= \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\\ &= \frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1}\\ &= \frac{(e^x+1)-2}{(e^x-1)(e^x+1)}\\ &= \frac{1}{e^x+1}\end{aligned}$$

Donc la somme de $\sum f_n$ est $S : x \mapsto \frac{1}{e^x+1} \in \mathcal{C}_{pm}(]0\,;+\infty[)$ et S est prolongeable par continuité en 0 (par $\frac{1}{2}$) et

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$$

or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$. Donc : S est intégrable sur I avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^{+\infty}\\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Autre solution pour calculer l'intégrale : par changement de variable $t = e^x$ avec $x \mapsto e^x \in \mathcal{C}^1(]0\,;+\infty[)$ strictement croissante et bijective de $]0\,;+\infty[$ dans $]1\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\frac{1}{e^x}e^x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t\\ &= [\ln t - \ln(t+1)]_1^{+\infty}\\ &= \left[\ln\frac{t}{t+1}\right]_1^{+\infty} = \ln 2.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur } I\text{, sa fonction somme est } S : x \mapsto \tfrac{1}{e^x+1} \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \ln 2.}$$

Q5. Supposons par l'absurde que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x\right)$ converge. Or la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction S continue par morceaux, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc d'après les questions précédentes, $\ln 2 = 0$; d'où la contradiction. Donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x\right) \text{ diverge.}}$$

Problème : ccinp 2023 maths 1 problème

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q6. Démontrer que $x\mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Q7. Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q8. 1re tentative
Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $f_n(x)=(-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q9. 2e tentative
Pour tout $x\in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q10. En déduire que :

$$I(\alpha)+J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos(\alpha x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}\right).$$

Q11. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

et

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad f_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\mathrm{d}t$$

Q12. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q13. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q14. Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q15. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

Q16. Démontrer que $t\mapsto\frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q17. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x)-f_\alpha'(x)=\frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

Q18. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x)=\Gamma(\alpha)e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y-y'=\frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.
En déduire que : $\forall x\in]0,+\infty[, f_\alpha(x)=g_\alpha(x)$.

Q19. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\mathrm{d}t=\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

Q20. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Q21. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$