

Devoir Surveillé n° 8 sujet 1.

le 27 mars.

Exercice 1

a et b étant deux fonctions continues sur \mathbb{R} , on note l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty; 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur \mathbb{R} vérifiant (E) sur \mathbb{R} tout entier.

Q1. Donner la dimension des espaces vectoriels S^+ et S^- .

Q2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle J .

Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.

Q3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E) : x^2 y'' + xy' = 0.$$

Déterminer S^+ et S^- .

Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S .

Q4. Dans cette question $(E) : x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$.

Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).

En déduire S^+ puis S^- .

Déterminer S et donner la dimension de S .

Q5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).

On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

Q6. Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r; r[$ ($r > 0$) de \mathbb{R} ?

Exercice 3

On définit deux fonctions :

- la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

Q7. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x, y) .

Q8. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x, y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :

- a) en calculant $f \circ g$;
- b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiniennes.

Problème

Partie préliminaire

Q9. a) Soit $x \in]0; +\infty[$, démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

b) On note, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$ (fonction Gamma d'Euler). Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.

c) Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Q10. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ et en déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ sera notée γ dans tout le sujet (γ est appelée la constante d'Euler).

Dans la suite de ce problème, on définit pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

Q11. Pour $x \in]0; +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0; +\infty[$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in]0, n], f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t \in]n, +\infty[, f_n(t) = 0.$$

a) Démontrer que pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x \in]0; +\infty[$ et tout $t \in]0; +\infty[$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}.$$

b) En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

Q12. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0; +\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

b) En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0; +\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

c) Démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \quad (\text{formule de Gauss}).$$

Q13. Pour tout entier $n \geq 1$, on note toujours $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que pour $n \geq 1$ et $x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right],$$

démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] \quad (\text{formule de Weierstrass}).$$

Q14. a) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} [\ln(1 + \frac{x}{k}) - \frac{x}{k}]$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

b) On pose, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} [\ln(1 + \frac{x}{k}) - \frac{x}{k}]$. Démontrer que l'application g est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

c) En déduire que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\psi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$. On rappelle que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Q15. a) Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

b) Calculer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\psi(x+1) - \psi(x)$ puis démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

c) On pose, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$. Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0; +\infty[$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi(x+n) - \psi(1+n))$.

Q16. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0; +\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$,
- pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x}$,
- pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Autour de la fonction Digamma

Q17. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k , on la remet alors dans l'urne avec k nouvelles boules toutes numérotées k .

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

- Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k , $P(Y = k) = \frac{1}{n} (\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k})$.
- Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1))$$