

# Devoir Surveillé n° 8 sujet 2.

## le 27 mars.

### Exercice 1

$a$  et  $b$  étant deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , on note l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note  $S^+$  l'espace vectoriel des solutions de  $(E)$  sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$  et  $S^-$  l'espace vectoriel des solutions de  $(E)$  sur l'intervalle  $J = ]-\infty, 0[$ .

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel  $S$  des fonctions  $y$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

**Q1.** Donner la dimension des espaces vectoriels  $S^+$  et  $S^-$ .

**Q2.** On note  $\varphi$  l'application linéaire de  $S$  vers  $S^+ \times S^-$  définie par  $\varphi(f) = (f_I, f_J)$  où  $f_I$  désigne la restriction de la fonction  $f$  à l'intervalle  $I$  et  $f_J$  désigne la restriction de la fonction  $f$  à l'intervalle  $J$ .

Donner le noyau de l'application  $\varphi$  et en déduire que  $\dim S \leq 4$ .

**Q3.** Dans cette question, on considère  $a(x) = x$  et  $b(x) = 0$ , d'où

$$(E) : x^2 y'' + xy' = 0.$$

Déterminer  $S^+$  et  $S^-$ .

Déterminer ensuite  $S$  et donner sans détails la dimension de  $S$ .

**Q4.** Dans cette question  $(E) : x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$ .

Déterminer deux solutions sur  $I$  de cette équation de la forme  $x \mapsto x^\alpha$  ( $\alpha$  réel).

En déduire  $S^+$  puis  $S^-$ .

Déterminer  $S$  et donner la dimension de  $S$ .

**Q5.** Donner un exemple d'équation différentielle du type  $(E) : x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$  tel que  $\dim S = 0$  (on détaillera).

On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

### Exercice 2

On considère l'équation différentielle  $(E) : x^2 y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$ .

**Q6.** Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation  $(E)$  développables en série entière sur un intervalle  $]-r; r[$  ( $r > 0$ ) de  $\mathbb{R}$  ?

## Théorème de stabilité de Liapounov

---

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul. On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel de  $\mathbf{K}^n$ ,  $\mathbf{K}$  pouvant être  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

Si  $u$  et  $v$  sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation  $u \circ v$  a un sens, alors on note  $uv$  l'application  $u \circ v$ . De plus, si  $u$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  et  $k$  est un entier naturel non nul,  $u^k$  désigne l'application  $u \circ \dots \circ u$ , où  $u$  apparaît  $k$  fois dans l'écriture. Par convention  $u^0 = id_E$ .

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' &= \varphi(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases},$$

avec  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  et  $\varphi$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbf{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ , telle que  $\varphi(0) = 0$ . Cela entraîne que si  $x_0 = 0$ , alors la solution de ce système est la fonction nulle, et donc 0 est un point d'équilibre. Notons  $d\varphi(0)$  l'application différentielle de  $\varphi$  en 0. L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur le spectre de  $d\varphi(0)$  pour assurer la stabilité de l'équilibre en ce point, et d'obtenir des informations quant à la dynamique des solutions au voisinage de ce point d'équilibre. Plus précisément, on établit le résultat suivant :

### **Théorème de Liapounov :**

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' &= \varphi(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases},$$

avec  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  et  $\varphi$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbf{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ , telle que  $\varphi(0) = 0$  et telle que toutes les valeurs propres complexes de  $d\varphi(0)$  aient une partie réelle strictement négative. Alors il existe trois constantes  $\tilde{\alpha}$ ,  $C$  et  $\beta$  strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \|f_{x_0}(t)\| \leq C e^{-\beta t} \|x_0\|,$$

où  $f_{x_0}$  est l'unique solution du système différentiel et  $B(0, \tilde{\alpha})$  désigne la boule ouverte, pour la norme  $\|\cdot\|$ , de centre 0 et de rayon  $\tilde{\alpha}$ .

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{K}^n$ . Dans la seconde partie, on établit des résultats sur le système différentiel linéaire, en servant des résultats de la partie A. Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la partie B.

### **A.. Etude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$**

Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}^n$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1  $\triangleright$  Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

**2** ▷ On note  $\|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ . Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{L}(E)$ .

**3** ▷ Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad \|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

et en déduire une majoration de  $\|u^k\|$ , pour tout entier naturel  $k$ , en fonction de  $\|u\|$  et de l'entier  $k$ .

## B.. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie,  $a$  désigne un endomorphisme de  $\mathbf{C}^n$ .

**4** ▷ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul  $r$ , des nombres complexes distincts  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , ainsi que des entiers naturels non nuls  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , tels que :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_i,$$

où pour  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $E_i = \text{Ker}(a - \lambda_i \text{id}_{\mathbf{C}^n})^{m_i}$ .

D'après la question précédente, si  $x$  est un élément de  $\mathbf{C}^n$ , il existe un unique  $r$ -uplet  $(x_1, \dots, x_r) \in E_1 \times \dots \times E_r$  tel que  $x = \sum_{i=1}^r x_i$ . Fixons à présent  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ . On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \begin{cases} \mathbf{C}^n & \rightarrow & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{cases} \quad \text{et} \quad q_i : \begin{cases} E_i & \rightarrow & \mathbf{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{cases}.$$

Par ailleurs, on note  $\|\cdot\|_i$  la norme sur  $\mathcal{L}(E_i)$  introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad \|u\|_i = \sup_{\substack{x \in E_i \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation  $\|\cdot\|_c$  pour  $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ . Enfin, on notera  $a_i$  l'endomorphisme  $p_i a q_i$ .

**5** ▷ Montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ , il existe une constante  $C_i > 0$  telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad \|q_i u p_i\|_c \leq C_i \|u\|_i.$$

**6** ▷ Montrer que, pour  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $E_i$  est stable par  $a$ .

**7** ▷ Soient  $(i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2$ . Exprimer  $p_i q_j$  puis  $\sum_{i=1}^r q_i p_i$  en fonction des endomorphismes  $id_{\mathbf{C}^n}$  et  $id_{E_j}$ .

**8** ▷ Montrer que :  $a = \sum_{i=1}^r q_i a_i p_i$ .

**9** ▷ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^r q_i e^{ta_i} p_i.$$

**10** ▷ Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \|e^{ta_i}\|_i \leq |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} \|a_i - \lambda_i id_{E_i}\|_i^k.$$

**11** ▷ En déduire l'existence d'un polynôme  $P$  à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \|e^{ta}\|_c \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{tRe(\lambda_i)},$$

où  $Re(z)$  désigne la partie réelle d'un nombre complexe  $z$ .

**12** ▷ Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , on notera  $u_A$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  dans  $\mathbf{R}^n$  et  $v_A$  l'endomorphisme de  $\mathbf{C}^n$  canoniquement associé à  $A$ , vue comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . On conservera la notation  $\|\cdot\|_c$  pour la norme introduite à la partie A sur  $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$  et on utilisera  $\|\cdot\|_r$  sur  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ . Montrer qu'il existe  $C > 0$  telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \|e^{tu_A}\|_r \leq C \|e^{tv_A}\|_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère  $u$  un endomorphisme de  $\mathbf{R}^n$ , et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs,  $Sp(A)$  le spectre complexe de  $A$ . Notons  $g_{x_0}$  l'unique solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}_+$  de :

$$\begin{cases} y' &= u(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases}.$$

**13** ▷ Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \iff Sp(A) \subset \mathbf{R}_-^* + i\mathbf{R}.$$

**14** ▷ On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes  $C_2$  et  $\alpha$  strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \|e^{tu}\|_r \leq C_2 e^{-\alpha t},$$

et en déduire une majoration de  $\|g_{x_0}(t)\|$  pour  $t \in \mathbf{R}_+$ .

### C.. Démonstration du théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application  $\varphi$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\varphi(0) = 0$ , et en notant  $a = d\varphi(0)$ , telle que toutes les valeurs propres de  $a$  aient une partie réelle strictement négative.

Soit  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ . On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' &= \varphi(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases} .$$

On admettra l'existence d'une solution de ce système définie sur  $\mathbf{R}_+$ , que l'on notera  $f_{x_0}$ .

**15** ▷ Montrer que la fonction

$$b : \begin{cases} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto \int_0^{+\infty} \langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \rangle dt \end{cases}$$

est bien définie et qu'elle définit un produit scalaire sur  $\mathbf{R}^n$ .

On notera  $q$  la forme quadratique associée à  $b$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $q(x) = b(x, x)$ .

**16** ▷ Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2.$$

Pour toute fonction  $y$  définie sur  $\mathbf{R}_+$ , on associe la fonction  $\varepsilon(y)$  définie par :

$$\varepsilon(y) : \begin{cases} \mathbf{R}_+ & \rightarrow \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto \varphi(y(t)) - a(y(t)) \end{cases} .$$

**17** ▷ Vérifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad q(f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))).$$

**18** ▷ Prouver l'existence de deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  strictement positifs tels que, pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ , on ait :

$$q(f_{x_0}(t)) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))) \leq -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

On fixe un tel couple  $(\alpha, \beta)$  pour la suite de ce problème.

**19** ▷ Montrer alors que :

$$q(x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall t \geq 0, \quad q(f_{x_0})(t) \leq e^{-\beta t} q(x_0).$$

**20**  $\triangleright$  En déduire l'existence de trois constantes  $\tilde{\alpha}$ ,  $C$  et  $\beta$  strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \|f_{x_0}(t)\| \leq C e^{-\frac{\beta}{2}t} \|x_0\|,$$

où  $B(0, \tilde{\alpha})$  désigne la boule ouverte, pour la norme  $\|\cdot\|$ , de centre 0 et de rayon  $\tilde{\alpha}$ .

---

FIN DU PROBLÈME