

DS n° 9 – Corrigé complet et barème

MP*/MPI*

Problème 1 Centrale 2022 PC – parties III et IV seulement (Q23 à Q45)

III Traitement Anti-reflet

III- A Réflexion sur le silicium

Q23. Dans le verre, l'indice vaut n_v , et dans le silicium, il vaut n_s . Sous incidence normale, les vecteurs d'onde sont colinéaires à \vec{e}_z et de norme

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi} = n \frac{\omega}{c}.$$

On obtient donc

$$\vec{k}_i = \frac{n_v \omega}{c} \vec{e}_z, \quad \vec{k}_r = -\frac{n_v \omega}{c} \vec{e}_z, \quad \vec{k}_t = \frac{n_s \omega}{c} \vec{e}_z.$$

Barème : 1,5 pt = 0,5 pour la norme ($k = n \frac{\omega}{c}$), 0,5 pour les orientations de \vec{k}_i et \vec{k}_t , 0,5 pour celle de \vec{k}_r

Q24. Pour une onde électromagnétique plane harmonique, d'après la relation de Maxwell-Faraday, traduite en notation complexe :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{B}_i(z, t) &= \frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0i} e^{i(\omega t - k_i z)}, \\ \vec{B}_r(z, t) &= -\frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0r} e^{i(\omega t + k_i z)}, \\ \vec{B}_t(z, t) &= \frac{n_s}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0t} e^{i(\omega t - k_t z)}. \end{aligned}$$

Les amplitudes sont donc

$$\vec{B}_{0i} = \frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0i}, \quad \vec{B}_{0r} = -\frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0r}, \quad \vec{B}_{0t} = \frac{n_s}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0t}.$$

On peut remarquer que les grandeurs pour les amplitudes ne sont pas soulignées. Cela est dû au fait qu'ici l'auteur sait par avance qu'il n'y aura pas de déphasage autre que 0 ou π ... Une écriture avec un soulignement n'est pas à pénaliser.

Barème : 1 pt = 0,5 pour la relation générale de structure, 0,5 pour les applications.

Q25. À l'interface verre/silicium située en $z = 0$, les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont continues.

Comme les champs électriques sont tangents à l'interface, on obtient ($z = 0$, et après simplification par $\exp(i\omega t)$)

$$\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}.$$

D'après la question précédente,

$$\vec{B}_{0i} = \frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0i}, \quad \vec{B}_{0r} = -\frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0r}, \quad \vec{B}_{0t} = \frac{n_s}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0t}.$$

Ces trois champs sont aussi tangents à l'interface. La continuité de la composante tangentielle de \vec{B} donne donc

$$\frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0i} - \frac{n_v}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0r} = \frac{n_s}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{0t}.$$

Soit

$$\vec{e}_z \wedge \left(n_v (\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r}) - n_s \vec{E}_{0t} \right) = \vec{0}.$$

Comme le vecteur à droite du produit vectoriel lui est orthogonal, on peut simplifier en

$$n_v (\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r}) - n_s \vec{E}_{0t} = \vec{0}.$$

On dispose donc du système

$$\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}, \quad n_v (\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r}) = n_s \vec{E}_{0t}.$$

En éliminant \vec{E}_{0t} ,

$$n_v (\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r}) = n_s (\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r}),$$

soit

$$(n_v - n_s) \vec{E}_{0i} = (n_v + n_s) \vec{E}_{0r}.$$

Cette relation montre donc que l'onde réfléchiée a même polarisation que l'onde incidente et on définira le coefficient ρ de réflexion de manière à avoir :

$$\vec{E}_{0r} = \rho \vec{E}_{0i}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\rho = \frac{n_v - n_s}{n_v + n_s} = r_{vs}}.$$

On remarque que ce coefficient est réel. C'est pour cela que les amplitudes des champs n'étaient pas écrites sous la forme d'un vecteur complexe...

Barème : 4 pts = 0,5 pour tangence \vec{E}_x , 0,5 pour tangence \vec{B}_x , 0,5 relations écrites en $z = 0$, 0,5 équation pour \vec{E} , 0,5 équation pour \vec{B} , 0,5 justification disparition \vec{e}_z , 0,5 définition ρ , 0,5 pour l'expression finale de $\rho = r_{vs}$.

Q26. Le coefficient de réflexion énergétique est défini par

$$R = \frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle},$$

où Π désigne le flux du vecteur de Poynting selon la normale à l'interface, compté positivement dans le sens de propagation de l'onde.

Pour une onde plane monochromatique, la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\vec{E} \wedge \vec{B}^*).$$

Dans un milieu d'indice n , avec

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E},$$

on obtient pour une onde se propageant à incidence normale

$$\langle \Pi \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c} \|\vec{E}_0\|^2.$$

Appliqué à l'onde incidente et à l'onde réfléchie, qui se propagent toutes deux dans le verre d'indice n_v , cela donne

$$\langle \Pi_i \rangle = \frac{n_v}{2\mu_0 c} \|\vec{E}_{0i}\|^2, \quad \langle \Pi_r \rangle = \frac{n_v}{2\mu_0 c} \|\vec{E}_{0r}\|^2.$$

Donc

$$R = \frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} = \frac{\|\vec{E}_{0r}\|^2}{\|\vec{E}_{0i}\|^2}.$$

Or, d'après la définition du coefficient de réflexion en amplitude,

$$\frac{\|\vec{E}_{0r}\|^2}{\|\vec{E}_{0i}\|^2} = |r_{vs}|,$$

d'où

$$R = |r_{vs}|^2.$$

En utilisant le résultat de la question précédente,

$$r_{vs} = \frac{n_v - n_s}{n_v + n_s},$$

on trouve

$$R = \left(\frac{n_v - n_s}{n_v + n_s} \right)^2.$$

Numériquement, avec $n_v = 1,5$ et $n_s = 4,0$,

$$R = \left(\frac{1,5 - 4,0}{1,5 + 4,0} \right)^2 = \left(\frac{-2,5}{5,5} \right)^2 = \left(\frac{5}{11} \right)^2 \simeq 0,45^2 \simeq 0,2.$$

La valeur exacte à la calculatrice est 0,2066.

Ainsi, environ 21 % de la puissance incidente est réfléchie. La réflexion sur le silicium nu est donc importante, ce qui justifie l'intérêt d'un traitement antireflet.

Barème : 3 pts = 0,5 définition R , 0,5 flux pour OPPM, 0,5 $R = |r_{vs}|^2$, 1 pour le calcul numérique, 0,5 commentaire.

III- B Couche antireflet

Q27. À l'interface dépôt/silicium située en $z = e$, le coefficient de réflexion en amplitude vaut d'après la Q25

$$r_{ds} = \frac{n_d - n_s}{n_d + n_s}.$$

Au point $z = e$, l'amplitude de l'onde se propageant vers $+z$ vaut

$$\vec{E}_{01} e^{-ik_d e},$$

et celle de l'onde se propageant vers $-z$ vaut

$$\vec{E}_{02} e^{ik_d e}.$$

On a donc

$$\vec{E}_{02} e^{ik_d e} = r_{ds} \vec{E}_{01} e^{-ik_d e}.$$

Donc

$$\vec{E}_{02} = r_{ds} \vec{E}_{01} e^{-2ik_d e}.$$

Or

$$k_d = \frac{n_d \omega}{c}, \quad \varphi = \frac{2n_d e \omega}{c} = 2k_d e.$$

Finalemment

$$\boxed{\vec{E}_{02} = r_{ds} \vec{E}_{01} e^{-i\varphi}}.$$

Barème : 1,5 pt = 0,5 pour l'écriture à $z = e$, 0,5 référence à situation étudiée en Q25, 0,5 pour la forme finale par calcul honnête...

Q28. Il faut écrire une autre contrainte de continuité en $z = 0$ par analogie il n'y a pas besoin de justifier autant et on aboutit à

$$\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02} = \vec{E}_{01} (1 + r_{ds} e^{-i\varphi})$$

Et

$$n_v \vec{E}_{0i} = n_d (\vec{E}_{01} - \vec{E}_{02}) = n_d \vec{E}_{01} (1 - r_{ds} e^{-i\varphi})$$

En éliminant \vec{E}_{0i} il vient donc

$$n_v \vec{E}_{01} (1 + r_{ds} e^{-i\varphi}) = n_d \vec{E}_{01} (1 - r_{ds} e^{-i\varphi})$$

On en déduit donc que Pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie dans le verre, on doit avoir

$$n_v (1 + r_{ds} e^{-i\varphi}) = n_d (1 - r_{ds} e^{-i\varphi}),$$

ce qui se réécrit

$$\frac{n_d - n_v}{n_d + n_v} = r_{dv} = r_{ds} e^{-i\varphi} = \frac{n_d - n_s}{n_d + n_s} e^{-i\varphi}.$$

Comme r_{dv} et r_{ds} sont des réels (positifs ou négatifs...) d'une part nécessairement l'exponentielle complexe est de module 1, et de plus $r_{dv} \pm r_{ds}$.

Commençons par étudier le cas +. Cela donne

$$\frac{n_d - n_v}{n_d + n_v} = \frac{n_d - n_s}{n_d + n_s},$$

soit après formation des produits en croix, développement, et simplification

$$n_d n_s = n_d n_v,$$

ce qui imposerait $n_d = 0$ ce qui est impossible.

Examinons l'autre possibilité, celle avec le -. Cela donne

$$\frac{n_d - n_v}{n_d + n_v} = \frac{n_s - n_d}{n_d + n_s},$$

soit après calculs :

$$n_d^2 = n_s n_v,$$

ce qui impose donc bien $n_d = \sqrt{n_d n_s}$. Mais cela signifie qu'on alors nécessairement la hiérarchie $n_v < n_d < n_s$. Dès lors r_{dv} et r_{ds} sont de signes opposés et on a $e^{-i\varphi} = -1$, ce qui impose $\varphi = (2p + 1)\pi$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Barème : 5 pts = 0,5 continuité \vec{E} en $z = 0$, 0,5 continuité \vec{B} en $z = 0$, 0,5 conséquence initiale, 0,5 $e^{-i\varphi} \in \mathbb{R}$, 0,5 \pm ; 0,5 cas + exploité, 0,5 cas + impossible, 0,5 cas - exploité, 0,5 cas - $n_d =$, 0,5 condition sur φ .

Q29. Dans ces conditions, la réflexion est annulée pour la longueur d'onde visée, donc la puissance transmise dans le silicium est maximale.

Comme 600 nm appartient à la zone où le spectre solaire est très intense, cela améliore l'efficacité de conversion photovoltaïque de la cellule.

Barème : 1 pt = 0,5 pour l'idée de transmission totale, 0,5 pour l'intérêt photovoltaïque par longueur d'onde du rayonnement solaire.

IV Bandes d'énergie dans un semi-conducteur

IV- A Équation de Schrödinger à une dimension

Q30. On cherche quand une onde plane

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

est solution de

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi.$$

En substituant,

$$\hbar\omega \psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi + V(x)\psi.$$

Il faut donc que $V(x)$ soit constant, disons $V(x) = V_0$, et la relation de dispersion est

$$\boxed{\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0.}$$

Barème : 1,5 pt = 0,5 substitution, 0,5 pour $V = \text{cste}$, 0,5 pour la relation de dispersion.

Q31. On connaît les relations de Planck-Einstein et de de Broglie :

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k.$$

La relation précédente devient

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_0,$$

qui est précisément l'expression classique de l'énergie mécanique d'une particule libre dans un potentiel constant.

Barème : 1,5 pt = 0,5 chaque relation quantique, 0,5 pour l'interprétation classique.

Q32. On cherche une solution sous la forme

$$\psi(x, t) = \varphi(x)\chi(t).$$

En substituant,

$$i\hbar\varphi(x)\chi'(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)\chi(t) + V(x)\varphi(x)\chi(t).$$

En divisant par $\varphi(x)\chi(t)$,

$$i\hbar \frac{\chi'(t)}{\chi(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x).$$

Le membre de gauche ne dépend que de t , celui de droite que de x ; ils sont donc égaux à une constante E , homogène à une énergie, dont on est obligé avec nos maigres connaissances au programme, d'admettre qu'il s'agit de l'énergie de la particule. On obtient alors l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x).}$$

Barème : 2 pts = 0,5 pour la séparation des variables, 0,5 pour chaque terme constant, 0,5 constante homogène à une énergie, 0,5 pour l'équation finale.

IV- B Gaz d'électrons sur un segment

Q33. Dans la boîte, le potentiel vaut $V = 0$ pour $0 < x < L$ et $V = +\infty$ à l'extérieur. Avec ce choix d'origine, l'énergie est purement cinétique dans la boîte :

$$E = \frac{p^2}{2m} \geq 0.$$

Elle ne peut donc pas être négative.

Barème : 0,5 pt

Q34. Dans la région $0 < x < L$, l'équation stationnaire s'écrit

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Donc

$$\varphi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

Les conditions aux limites sont

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = 0.$$

La première impose $B = 0$, puis la seconde impose

$$\sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

car la solution $n = 0$ donnerait une fonction d'onde identiquement nulle. Donc

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Les énergies sont

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}}.$$

À un facteur de phase près, les états stationnaires peuvent s'écrire

$$\boxed{\psi_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-iE_n t/\hbar}},$$

ou, sous forme normalisée,

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-iE_n t/\hbar}.$$

Barème : 4 pts = 0,5 eq SIT correcte avec k, 0,5 solution, 0,5 les deux conditions aux limites, 0,5 pour la quantification de k, 0,5 $n > 0$, 0,5 pour E_n , 0,5 évocation normalisation, 0,5 fonction d'onde finale.

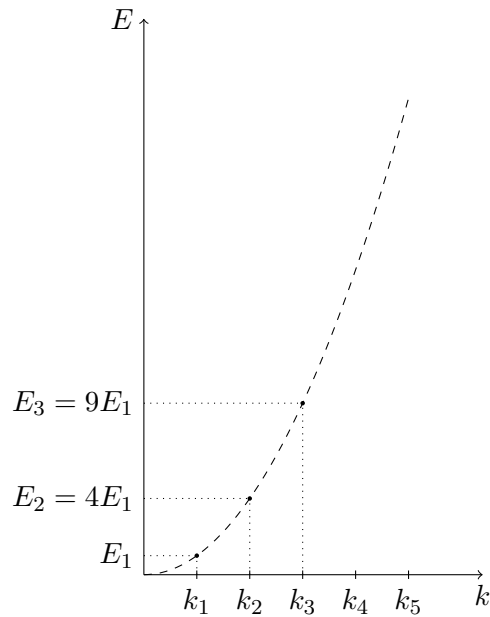
Q35. La relation de dispersion reste

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Il faut tracer une parabole croissante (en pointillés ce serait mieux car toutes les énergies ne sont pas possibles) sur $k \geq 0$ et y placer les trois premiers niveaux :

$$k_1 = \frac{\pi}{L}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{L}, \quad k_3 = \frac{3\pi}{L},$$

$$E_1, \quad E_2 = 4E_1, \quad E_3 = 9E_1.$$



Barème : 2 pt = 0,5 axes nommés, 0,5 pour la parabole, 0,5 pour les k_i régulièrement espacés, 0,5 pour les énergies correctement réparties.

Q36. Pour $L = 1 \mu\text{m}$,

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \simeq 3,8 \times 10^{-7} \text{ eV.}$$

À $T = 300 \text{ K}$,

$$k_B T \simeq 2,6 \times 10^{-2} \text{ eV.}$$

Donc

$$E_1 \ll k_B T.$$

L'écart typique entre niveaux est extrêmement petit devant l'agitation thermique : on parle donc de quasi-continuum d'énergie.

Barème : 2 pts = 1 pour AN E_1 , 0,5 pour AN $k_B T$, 0,5 écart typique et conclusion.

Q37. Le nombre total d'électrons dans la boîte vaut approximativement

$$N \simeq N_0^{1/3} L.$$

À $T = 0 \text{ K}$, les niveaux sont occupés par énergie croissante, avec au plus deux électrons par niveau (deux états de spin). Ainsi,

$$2n_F \simeq N, \quad \text{soit} \quad \boxed{n_F \simeq \frac{N_0^{1/3} L}{2}}.$$

L'énergie de Fermi est alors

$$E_F = E_{n_F} = n_F^2 E_1,$$

soit

$$\boxed{E_F = \frac{N_0^{2/3} L^2}{4} E_1}.$$

Barème : 2 pts = 0,5 Ntotal, 0,5 $n_F = N/2$, 0,5 pour $n_F =$, 0,5 pour l'expression finale E_F .

IV- C Potentiel périodique, bandes d'énergie

Q38. Les cuvettes de potentiel représentent les zones proches des ions du cristal, où les électrons sont davantage liés. La période $2a$ représente le pas du réseau cristallin, c'est-à-dire la distance entre deux motifs élémentaires identiques.

Barème : 1 pt = 0,5 + 0,5.

Q39. Pour $E > V_0$, la particule est propagative dans les deux régions. On pose

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad K = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} > 0.$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps prend alors la forme

$$\varphi'' + k^2\varphi = E\varphi \quad \text{dans les zones où } V = 0$$

et

$$\varphi'' + K^2\varphi = E\varphi \quad \text{dans les zones où } V = V_0.$$

Les solutions dans chaque zone sont donc des combinaisons d'ondes planes :

$$\varphi(x) = A_n e^{-ikx} + B_n e^{ikx} \quad \text{si } (2n-1)a < x < 2na,$$

$$\varphi(x) = C_n e^{-iKx} + D_n e^{iKx} \quad \text{si } 2na < x < (2n+1)a.$$

Barème : 2 pts = 0,5 pour chaque ESIT écrite avec k, K , 0,5 pour chaque solution.

Q40. Aux interfaces d'un potentiel fini, la fonction d'onde φ et sa dérivée φ' sont continues.

En $x = 2na$:

$$A_n + B_n - C_n - D_n = 0,$$

$$kA_n - kB_n - KC_n + KD_n = 0.$$

En $x = (2n+1)a$, après évaluation des exponentielles :

$$A_{n+1}e^{-ika} + B_{n+1}e^{ika} - C_n e^{-iKa} - D_n e^{iKa} = 0,$$

$$kA_{n+1}e^{-ika} - kB_{n+1}e^{ika} - KC_n e^{-iKa} + KD_n e^{iKa} = 0.$$

C'est bien le système annoncé.

Barème : 2 pts = 0,5 pour les continuité de φ , 0,5 pour φ' car saut potentiel fini, 1 pour le système complet.

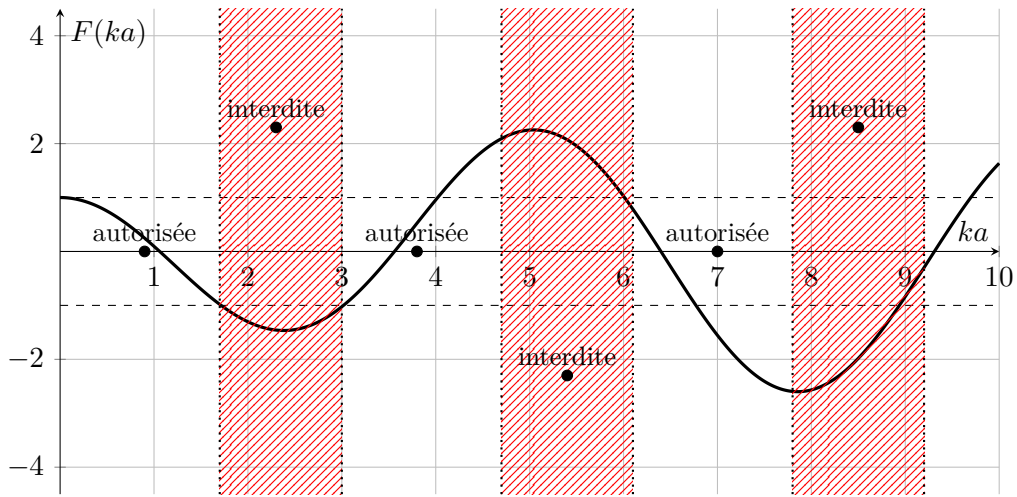
Q41. Cette translation inverse les deux zones $V = 0$ et $V = V_0$. Autrement dit cela échange k et K , et donc transforme α en $1/\alpha$. Cependant la contrainte sur l'existence des solutions doit être la même malgré la translation. Or seule l'expression **c)** reste invariante sous cette transformation :

$$\boxed{-1 \leq F_\alpha(ka) = \cos(ka) \cos(\alpha ka) - \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \sin(ka) \sin(\alpha ka) \leq 1.}$$

Barème : 2 pts. 0,5 conséquence directe (sur les potentiels) de la translation ; 0,5 conséquence sur l'échange de k et K ; 0,5 invariance de la condition ; 0,5 choix de la solution

Q42. Les énergies autorisées sont celles pour lesquelles

$$|F_\alpha(ka)| \leq 1.$$



Quand $|F_\alpha(ka)| > 1$, il n'existe pas de solution de type onde de Bloch propagative : on a une **bande interdite**.

Le modèle rend donc compte de l'existence de bandes permises et de bandes interdites, propriété essentielle des solides cristallins.

Barème : 2 pts = 0,5 pour le critère ; 1 pour exploitation graphique du critère sur toute la courbe ; 0,5 pour l'interprétation.

Q43. Si $\alpha = 1$, alors

$$F_1(ka) = \cos^2(ka) - \sin^2(ka) = \cos(2ka),$$

donc

$$|F_1(ka)| \leq 1$$

pour toute valeur de ka .

Il n'y a donc plus de bande interdite : toutes les énergies deviennent autorisées.

Cela correspond physiquement à la disparition du fait qu'il ya deux régions avec des potentiels différents ! On retrouve la particule libre.

Barème : 2 pts = 0,5 pour le calcul, 0,5 pour a conclusion , 0,5 + 0,5 pour l'interprétation (potentiel constant -> particule libre).

Q44. On prend $2a = 0,54$ nm, donc

$$a = 0,27$$
 nm.

Pour $\alpha = 0,2$, la première bande interdite correspond approximativement à

$$ka \simeq 1,7 \quad \text{et} \quad ka \simeq 3$$

pour ses bords. Comme

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (ka)^2,$$

on obtient

$$E_{\min} \simeq 1,5 \text{ eV}, \quad E_{\max} \simeq 4,8 \text{ eV}.$$

La largeur de la première bande interdite vaut donc environ

$$\boxed{\Delta E \simeq 3,2 \text{ eV}}.$$

Barème : 2,5 pt = 0,5 détermination graphique bords de la bande en ka, 1 pour 1er calcul E, 0,5 pour l'autre, 0,5 largeur.

Q45. Pour le silicium réel, la bande interdite est de l'ordre de 1 eV.

Le modèle étudié ici donne une valeur plus grande, de l'ordre de 3 eV. Il rend bien compte *qualitativement* de l'apparition de bandes, mais il reste trop simplifié pour fournir une valeur quantitative précise.

Barème : 1 pt = 0,5 pour la comparaison, 0,5 pour le commentaire critique.

Problème Mines – Q0 à Q18

IV- D I.A – Refroidissement progressif d'un supraconducteur

Q1. Comme $j_{\text{par}} = k(T - T_f)$ est un flux thermique surfacique, exprimé en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, k s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

Dans la loi de Fourier $\vec{j}_q = -\lambda \vec{\nabla} T$, avec \vec{j}_q en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ et ∇T en $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$, ainsi l'unité de λ est $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

En géométrie cartésienne unidimensionnelle, la loi de Fourier s'écrit

$$j_q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

L'application du premier principe à une tranche élémentaire de matériau entre deux instants infiniment proches donne

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_q}{\partial x}.$$

En combinant les deux,

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

qui est la forme 1D de l'équation de diffusion thermique.

Barème : 4 pts = 0,5 pour k avec justification, 0,5 pour λ avec justification, 0,5 pour système tranche, 0,5 pour premier principe + entre t et $t = dt$, 0,5 écriture du premier principe correcte avec les flux de j_q , 0,5 écriture $\frac{\partial j_q}{\partial x}$, 0,5 Loi de Fourier, 0,5 Obtention honnête finale.

Q2. La diffusivité thermique vaut

$$\boxed{D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\rho c}}.$$

Le temps caractéristique de diffusion au sein d'un solide de taille R est

$$\tau_{\text{diff}} \sim \frac{R^2}{D_{\text{th}}}.$$

Pour pouvoir considérer la température du matériau comme uniforme pendant un refroidissement de durée Δt , il faut que la diffusion interne soit rapide devant le refroidissement global :

$$\boxed{\frac{R^2}{D_{\text{th}}} \ll \Delta t.}$$

Barème : 2 pts = 0,5 pour D_{th} , 0,5 condition en français, 0,5 pour τ_{diff} , 0,5 pour la condition finale en formule.

Q3. La capacité thermique de la boule vaut

$$C_{\text{th}} = mc = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) c = \boxed{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho c}.$$

La résistance thermique associée à l'échange pariétal s'obtient à partir de

$$P = 4\pi R^2 k (T - T_f) = \frac{T - T_f}{R_{\text{th}}}.$$

Donc

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi R^2 k}}.$$

Barème : 1,5 pt = 0,5 pour C_{th} , 0,5 pour proportionnalité flux - différence de températures, 0,5 pour R_{th} .

Q4. Dans le liquide, si on néglige sa capacité thermique, tout se passe comme si il était en régime stationnaire radial sans source. Le flux du vecteur densité volumique de courant thermique à travers une sphère de rayon $r > R$ quelconque est une constante. On a donc

$$4\pi r^2 j_{th}(r) = Cte = -4\pi r^2 \lambda' \frac{dT}{dr},$$

soit $\frac{dT_f}{dr} = \frac{Cte_1}{r^2}$. Une intégration donne

$$T_f(r) = A - \frac{Cte_1}{r}.$$

La condition à l'infini donne $A = T_0$. La condition à la surface de la boule, $T_f(R) = T_s(t)$, donne

$$T_s(t) = T_0 - \frac{Cte_1}{R}, \quad \text{donc} \quad Cte_1 = -[T_s(t) - T_0]R.$$

Finalement

$$T_f(r, t) = T_0 + [T_s(t) - T_0] \frac{R}{r}.$$

On peut aussi voir que l'équation de la chaleur dans le fluide se limite à $\Delta T = 0$, soit $\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) = 0$, équation à partir de laquelle on retrouve les résultats précédents.

Barème : 2,5 pts. 0,5 prise en compte $c' = 0$, 0,5 équation différentielle (ordre 1 ou 2 selon méthode), 1 = 2* 0,5 Chaque condition aux limites, 0,5, intégration correcte

Q5. Il est licite de parler de résistance thermique car, en comme on l'a vu plus haut on est en régime stationnaire!

La puissance thermique traversant une sphère de rayon r est indépendante de r et proportionnelle à la différence de température entre ses bornes : on a bien une loi de type

$$P = \frac{\Delta T}{R'_{th}}.$$

Dans le liquide,

$$P = -4\pi r^2 \lambda' \frac{dT_f}{dr}.$$

Avec le profil trouvé à la question précédente,

$$P = 4\pi \lambda' R [T_s(t) - T_0].$$

Donc

$$R'_{th} = \frac{1}{4\pi \lambda' R}.$$

Barème : 1,5 pt = 0,5 0,5 justification possibilité de définir une résistance thermique, 0,5 Calcul flux , 0,5 expression finale.

Q6. Comme $\lambda' \gg Rk$, on a

$$R'_{th} = \frac{1}{4\pi \lambda' R} \ll \frac{1}{4\pi R^2 k} = R_{th}.$$

La résistance thermique du liquide est négligeable devant la résistance thermique d'échange conducto-convectif à la surface, alors que ces deux résistances sont en série. On peut donc prendre la température du fluide au contact égale à T_0 .

Le bilan thermique de la boule donne

$$C_{th} \frac{dT}{dt} = -4\pi R^2 k (T - T_0).$$

Avec

$$C_{th} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c,$$

on obtient

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{3k}{\rho R c}(T - T_0).$$

En posant

$$\tau = \frac{\rho R c}{3k},$$

on a

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T - T_0}{\tau}.$$

On peut aussi travailler avec les deux résistances thermiques et négliger la plus faible à la fin.

Barème : 1,5 pt = 0,5 système + premier principe + durée élémentaire, 0,5 écriture correcte , 0,5 pour négliger une résistance thermique.

Q7. L'équation obtenue à la question précédente a pour solution

$$T(t) = T_0 + (T_i - T_0)e^{-t/\tau}.$$

La courbe est une exponentielle décroissante partant de T_i et tendant vers T_0 .

Le matériau commence sa transition conducteur \rightarrow supraconducteur lorsque

$$T(\Delta t) = T_{sc}.$$

Donc

$$T_{sc} - T_0 = (T_i - T_0)e^{-\Delta t/\tau},$$

soit

$$\Delta t = \tau \ln\left(\frac{T_i - T_0}{T_{sc} - T_0}\right).$$

Barème : 2 pts = 0,5 pour résolution $T(t)$, 0,5 pour axes nommés, 0,5 pour l'allure, 0,5 pour Δt .

IV- E Refroidissement stationnaire d'un fil supraconducteur

Q8. Dans un cylindre de rayon r et de hauteur H , le volume vaut

$$V = \pi r^2 H.$$

Comme la puissance volumique produite est uniforme et vaut p_u , la puissance totale évacuée à travers la surface latérale située à r est

$$\mathcal{P}_s(r) = p_u \pi r^2 H.$$

Barème : 1 pt = 0,5 Puissance à l'intérieur , 0,5 justification : ça sort car régime stationnaire

Q9. En régime permanent, la puissance produite à l'intérieur du cylindre de rayon r est égale à la puissance traversant la surface cylindrique de rayon r :

$$\mathcal{P}_s(r) = 2\pi r H j_{th}(r).$$

Donc

$$2\pi r H j_{th}(r) = p_u \pi r^2 H,$$

d'où

$$j_{th}(r) = \frac{p_u r}{2}.$$

Barème : 1 pt. 0,5 expression du flux avec j_{th} , 0,5 Expression finale

Q10. À la surface $r = R$, le flux conductif sortant du fil est égal au flux convectif vers le liquide :

$$j_{\text{th}}(R) = k(T_s - T_0).$$

Or

$$j_{\text{th}}(R) = \frac{p_u R}{2}.$$

Donc

$$\boxed{T_s = T_0 + \frac{p_u R}{2k}}.$$

Barème : 1,5 pt = 0,5 continuité flux thermique, 0,5 équation associée , 0,5 pour T_s .

Q11. Par la loi de Fourier,

$$j_{\text{th}}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

Comme

$$j_{\text{th}}(r) = \frac{p_u r}{2},$$

on obtient

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{p_u}{2\lambda} r.$$

Après intégration,

$$T(r) = -\frac{p_u}{4\lambda} r^2 + C.$$

En utilisant la condition $T(R) = T_s$,

$$T(r) = T_s + \frac{p_u}{4\lambda} (R^2 - r^2).$$

La température est maximale au centre, en $r = 0$:

$$\boxed{T_{\text{max}} = T(0) = T_s + \frac{p_u R^2}{4\lambda}}$$

donc, en remplaçant T_s ,

$$\boxed{T_{\text{max}} = T_0 + \frac{p_u R}{2k} + \frac{p_u R^2}{4\lambda}}.$$

Il n'y a pas de quench si $T_{\text{max}} < T_{sc}$, soit

$$p_u \left(\frac{R}{2k} + \frac{R^2}{4\lambda} \right) < T_{sc} - T_0.$$

Ainsi,

$$\boxed{p_u < p_{\text{max}} = \frac{T_{sc} - T_0}{\frac{R}{2k} + \frac{R^2}{4\lambda}}}.$$

Barème : 3,5 pts = 0,5 eq diff en T, 0,5 intégration formelle, 0,5 condition aux limites, 0,5 lieu du max, 0,5 Expression du max, 0,5 Tmax fonction croissante de P_u , 0,5 p_{max} .

IV- F Thermodynamique des gaz parfaits MP*

Q12. Pour un ensemble de particules indépendantes au contact d'un réservoir à la température T , la probabilité de trouver une particule dans l'état d'énergie ε_j est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{k_B T}\right) = \exp(-\beta\varepsilon_j)$, plus précisément compte tenu de la condition de normalisation

$$\boxed{p(\mathcal{E} = \varepsilon_j) = \frac{e^{-\beta\varepsilon_j}}{Z(\beta)}}, \quad \text{avec } Z(\beta) = \sum_{j=1}^p e^{-\beta\varepsilon_j}.$$

Barème : 3 pts. 0,5 particules indépendantes, 0,5 Thermostat, 0,5 proba $\mathcal{E} = \varepsilon_i$, 0,5 facteur Boltzmann, 0,5 normalisation, 0,5 expression finale

Q13. L'énergie moyenne d'une particule vaut

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{j=1}^p \varepsilon_j p_j = \frac{\sum_j \varepsilon_j e^{-\beta\varepsilon_j}}{Z(\beta)}.$$

Or

$$Z'(\beta) = \sum_j (-\varepsilon_j) e^{-\beta\varepsilon_j},$$

donc

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = -\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}}.$$

Les particules étant indépendantes, l'énergie interne totale du système de N particules vaut

$$\boxed{U(\beta) = N\bar{\varepsilon} = -N\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}}$$

Barème : 2 pts = 0,5 définition $\bar{\varepsilon}$, 0,5 apparition Z' , 0,5 expression finale, 0,5 pour U .

Q14. On a

$$\sigma_\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2$$

avec

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{\sum_j \varepsilon_j^2 e^{-\beta\varepsilon_j}}{Z(\beta)}.$$

Il suffit donc d'exprimer cette quantité en fonction d'une somme pondérée sur les niveaux.

Pour N particules indépendantes,

$$U = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i,$$

donc les variances s'additionnent :

$$\boxed{\sigma_U = \sqrt{N} \sigma_\varepsilon}.$$

Comme $U \sim N$ mais $\sigma_U \sim \sqrt{N}$, les fluctuations relatives vérifient

$$\frac{\sigma_U}{U} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \ll 1$$

pour un système macroscopique.

Ainsi les fluctuations autour la valeur moyenne tendent à devenir inobservables pour les systèmes macroscopiques.

Barème : 3 pts = 0,5 définition σ_ε , 0,5 expression, 0,5 particules indépendantes, 0,5 pour σ_U , 0,5 résultats fluctuation négligeable, 0,5 démo .

Q15. Le nombre d'états dans l'intervalle $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ vaut

$$dg = q(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Comme dg est sans dimension, $q(\varepsilon)$ a l'unité inverse d'une énergie :

$$\boxed{[q(\varepsilon)] = \text{J}^{-1}.}$$

Barème : 0,5 pt.

Q16. Dans l'espace des vitesses, le nombre d'états de vitesse comprise entre v et $v + dv$ est proportionnel à la coquille sphérique

$$4\pi v^2 dv.$$

Or

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}, \quad dv \propto \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ainsi,

$$dg \propto v^2 dv \propto \varepsilon \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Donc

$$\boxed{q(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}.}$$

Barème : 2 pts. 0,5 volume élémentaire dans espace des vitesses, 0,5 v en fonction de ε , 0,5 dv , 0,5 $q =$

Q17. Avec

$$q(\varepsilon) = Q\sqrt{\varepsilon},$$

on a

$$Z(\beta) = \int_0^{+\infty} Q\sqrt{\varepsilon} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon.$$

En posant

$$x = \beta\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{x}{\beta}, \quad d\varepsilon = \frac{dx}{\beta},$$

il vient

$$Z(\beta) = Q \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x}{\beta}} e^{-x} \frac{dx}{\beta} = \frac{Q}{\beta^{3/2}} \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

Avec

$$A = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx,$$

on obtient

$$\boxed{Z(\beta) = Q A \beta^{-3/2}}.$$

Barème : 1,5 pt. 0,5 intégrale posée, 0,5 changement variable, 0,5 résultat final

Q18. À partir de

$$U(\beta) = -N \frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)},$$

et

$$Z(\beta) = Q A \beta^{-3/2},$$

on a

$$Z'(\beta) = -\frac{3}{2} Q A \beta^{-5/2}.$$

Donc

$$\boxed{U = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T.}$$

C'est le résultat attendu pour un gaz parfait monoatomique classique : chaque degré de liberté quadratique apporte $\frac{1}{2}k_B T$ par particule. Pour un gaz parfait diatomique aux températures usuelles où les vibrations sont gelées mais les rotations actives, on obtient

$$U = \frac{5}{2} N k_B T.$$

Plus généralement, pour f degrés de liberté quadratiques,

$$U = \frac{f}{2} N k_B T.$$

Barème : 2 pts = 0,5 eq de départ du calcul de U, 0,5 expression finale, 0,5 commentaire (th equipartition), 0,5 pour généralisation.

Exercice III – Saturne (partie I.A) MPI*

I.A.1

La masse volumique moyenne vaut :

$$\rho = \frac{M_{\text{Sa}}}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{Sa}}^3}.$$

Application numérique :

$$\rho = \frac{5,69 \times 10^{26}}{\frac{4}{3}\pi(5,82 \times 10^7)^3} \simeq 690 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Cette valeur est inférieure à celle de l'eau : Saturne est une planète peu dense, essentiellement constituée d'hydrogène.

Barème : 2 pt = 0,5 (formule) + 1 AN + 0,5 commentaire

I.A.2

Par symétrie sphérique et théorème de Gauss :

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}.$$

Avec densité uniforme :

$$M(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Donc :

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho r.$$

À la surface :

$$g_0 = \frac{GM_{\text{Sa}}}{R_{\text{Sa}}^2}.$$

Application numérique :

$$g_0 \simeq \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,69 \times 10^{26}}{(5,82 \times 10^7)^2} \simeq 11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Barème : 4,5 pts = 0,5 Gauss, 0,5 invariance, 0,5 symétrie, 0,5 surface de Gauss, 0,5 Flux, 0,5 Masse intérieure, 0,5 Expression, 1 AN

I.A.4.a

Puissance totale émise par le Soleil :

$$\Phi_0 = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4.$$

Application numérique :

$$\Phi_0 \approx 4\pi(6,96 \times 10^8)^2 \sigma (5700)^4 \simeq 3,9 \times 10^{26} \text{ W}.$$

Barème : 1,5 pt = 0,5 (expression) + 1 (numérique)

I.A.4.b

Flux solaire à la distance d_{SaS} :

$$\frac{\Phi_0}{4\pi d_{SaS}^2}.$$

Puissance interceptée :

$$\pi R_{Sa}^2 \frac{\Phi_0}{4\pi d_{SaS}^2}.$$

Puissance absorbée :

$$\Phi_{\text{abs}} = a \times \pi R_{Sa}^2 \frac{\Phi_0}{4\pi d_{SaS}^2} = a \left(\frac{R_{Sa}}{2d_{SaS}} \right)^2 \Phi_0.$$

Barème : 1,5 pt = 0,5 flux solaire surfacique au niveau de Saturne, + 0,5 Puissance interceptée, 0,5 puissance absorbée

I.A.4.c

Puissance émise :

$$\Phi_{\text{ém}} = 4\pi R_{Sa}^2 \sigma T_{Sa}^4.$$

Équilibre thermique (plutôt équilibre radiatif) :

$$\Phi_{\text{ém}} = \Phi_{\text{abs}}.$$

Donc :

$$4\pi R_{Sa}^2 \sigma T_{Sa}^4 = a\pi R_{Sa}^2 \frac{\Phi_0}{4\pi d_{SaS}^2}.$$

On simplifie :

$$T_{Sa}^4 = \frac{a\Phi_0}{16\pi\sigma d_{SaS}^2}.$$

Avec $\Phi_0 = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$:

$$T_{Sa} = T_S \left(\frac{R_S}{2d_{SaS}} \right)^{1/2} a^{1/4}.$$

Application numérique :

$$T_{Sa} \approx 90 \text{ K}.$$

La température réelle étant 130 K, Saturne émet plus qu'elle ne reçoit : source interne d'énergie.

Barème : 3 pts = 0,5 Puissance émise par Saturne, 0,5 équilibre radiatif, 0,5 Expression T_{Sa} + 1 AN + 0,5 commentaire