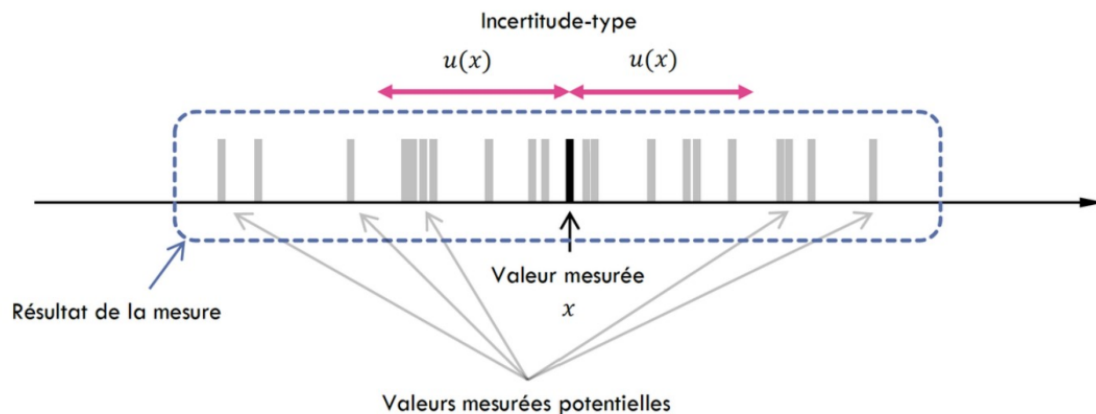


# Incertitudes

## 1 Mesures et incertitudes

### 1.1 Variabilité de la mesure

En physique et en chimie, comme dans toutes les sciences de la nature, on appelle mesure l'ensemble des opérations qui permettent d'attribuer une valeur à une grandeur physique. Cette valeur est un nombre souvent associé à une unité. La valeur obtenue par une mesure est incertaine. Il existe de nombreuses sources d'incertitudes qui sont liées à la méthode de mesure, aux instruments de mesure, à l'environnement, à la personne qui réalise les mesures (opérateur ou opératrice).



#### ♥ À retenir : Résultat d'une mesure

- ♥ Le résultat d'une mesure n'est pas une valeur unique mais un ensemble de valeurs numériques raisonnablement attribuables à la grandeur d'intérêt.

On le présentera sous la forme :

$$x = \dots \text{ unité} ; u(x) = \dots \text{ unité}$$

- ♥ La valeur mesurée est une valeur particulière de cet ensemble.
- ♥ L'incertitude est une indication de la dispersion de cet ensemble.
- ♥ L'incertitude-type, notée  $u(x)$ , est une incertitude évaluée à l'aide d'un écart-type.

Exemples :  $\ell = 10,000 \text{ cm}$ ;  $u(\ell) = 0,029 \text{ cm}$  et  $\ell = 10,0 \text{ cm}$ ;  $u(\ell) = 1,2 \text{ cm}$

## 1.2 Comparaison de deux mesures

On sera amené à comparer deux valeurs mesurées de la même grandeur selon deux protocoles ou une valeur mesurée à une valeur de référence (une valeur tabulée par exemple). Comment conclure ?

### ♥ À retenir : Comparaison de deux mesures

- Pour comparer 2 mesures  $x_1$  et  $x_2$  selon deux protocoles, d'incertitudes-types respectives  $u(x_1)$  et  $u(x_2)$ , on calcule le **z-score** ou l'**écart-normalisé**, défini par :

$$z = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}}$$

- Si on compare une valeur mesurée avec une valeur de référence dont l'incertitude est négligeable devant celle de la mesure effectuée, alors  $z = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$ .

Que peut-on en dire ?

- Par convention, si  $z < 2$ , les deux mesures sont compatibles entre elles.
- Si  $z > 2$  alors les mesures ne sont pas compatibles entre elles, et il faut alors discuter des raisons de ce désaccord. Une incompatibilité n'est pas synonyme d'échec. Néanmoins il convient de s'interroger sur le processus ayant conduit au résultat. A-t-on fait une erreur de mesure ? de calcul ? a-t-on oublié une source d'incertitude ?

## 2 Plusieurs mesures : évaluation de type A de l'incertitude

Soit une grandeur physique  $x$  que l'on cherche à mesurer. L'évaluation de type A de l'incertitude-type repose sur l'**analyse statistique** d'une série de  $n$  mesures  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ .

### ♥ À retenir : Évaluation de type A de l'incertitude

À partir d'une série de  $n$  mesures  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ , on détermine :

- la **valeur moyenne**  $\bar{x}$  de la série de  $n$  mesures :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$$

La valeur moyenne est la meilleure estimation disponible de la grandeur  $x$ .

- l'**écart-type expérimental**  $s_x$  de la série de  $n$  mesures :

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{x})^2}$$

- l'**incertitude-type de la moyenne** est donnée par

$$u(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Rq : La variabilité de la valeur moyenne d'une série de mesure est beaucoup plus faible que celle d'une mesure elle-même puisque dans une moyenne il y a compensation partielle des écarts positifs et négatifs à la moyenne.

### 3 Mesure unique : évaluation de type B de l'incertitude

Il arrive que toutes les mesures répétées donnent le même résultat, car la résolution (ou « précision ») de l'appareil de mesure cache la variabilité des mesures. Dans ce cas on procède à une **évaluation de type B de l'incertitude**.

#### 3.1 Évaluation de type B

L'évaluation de type B **ne repose donc pas sur une étude statistique** des données expérimentales, mais sur un « jugement scientifique [prenant en compte] toutes les informations disponibles au sujet de la variation possible [de la grandeur à mesurer.] »<sup>1</sup>

On doit donc **estimer** le plus petit intervalle dans lequel peut se trouver la valeur de la grandeur à mesurer. Les critères retenus pour cette estimation sont **subjectifs** et **doivent toujours être précisés**. On écrira cet intervalle sous la forme  $[x - \Delta, x + \Delta]$ , centré sur l'unique valeur mesurée  $x$ .

Comment évaluer l'incertitude-type  $u(x)$  liée à la valeur  $x$  ?

On suppose pour simplifier que toutes les valeurs que l'on pourrait potentiellement mesurer (si la résolution de l'instrument le permettait) sont **uniformément distribuées** dans l'intervalle  $[x - \Delta, x + \Delta]$ .

**♥ À retenir : Évaluation de l'incertitude-type sur une mesure unique**

À partir d'une unique mesure  $x$  d'une grandeur, l'incertitude-type est donnée par :

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad \text{avec } \Delta \text{ la demi-largeur de l'intervalle pouvant contenir la grandeur à mesurer}$$

#### 3.2 Composition des incertitudes

Nous serons souvent amenés à effectuer des mesures indirectes, c'est-à-dire à calculer la valeur d'une grandeur physique à partir de la mesure de plusieurs autres grandeurs physiques. Les incertitudes sur les grandeurs mesurées se propagent sur la grandeur calculée. On utilise la méthode de composition des incertitudes pour estimer l'incertitude composée sur la grandeur calculée.

**♥ À retenir : Composition des incertitudes**

Relation	$z = \lambda x$	$z = x + y$	$z = x - y$	$z = x \times y$	$z = \frac{x}{y}$
Incertainde-type composée	$u(z) =  \lambda  \times u(x)$	$u(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$		$u(z) =  z  \times \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	

Si une incertitude l'emporte largement sur l'autre on peut simplifier le calcul en négligeant l'incertitude la plus petite.

1. Extrait du *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (2008)*, p. 12, disponible à l'adresse <https://www.bipm.org/fr/publications/guides>.

On peut généraliser ces formules :

- Pour  $z = \alpha x + \beta y$  :

$$u(z) = \sqrt{(\alpha u(x))^2 + (\beta u(y))^2}$$

- Pour  $z = x^\alpha \times y^\beta$  :

$$u(z) = |z| \times \sqrt{\left(\frac{\alpha u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\beta u(y)}{y}\right)^2}$$

### 3.3 Simulation Monte-Carlo

Pour remplacer les calculs de composition fastidieux et qui conduisent à des résultats incorrects si les incertitudes relatives sont trop élevées et/ou si les relations entre grandeurs ne sont pas linéaires, nous préférons utiliser la **simulation Monte-Carlo** pour déterminer  $u(z)$ .

#### ♥ À retenir : Calcul d'incertitude composée par simulation Monte-Carlo

1. Mesurer  $x$  et  $y$ , et en déduire la valeur de  $z(x, y)$  en appliquant la formule.
2. Évaluer les demi-largeurs  $\Delta x$  et  $\Delta y$  des intervalles dans lesquels les mesures de  $x$  et de  $y$  se trouvent sûrement.
3. Réaliser  $N$  simulations par tirage aléatoire uniformément réparties dans les intervalles précédents.
4. Déterminer la valeur de  $z$  pour chacune des  $N$  simulations.
5. L'incertitude-type sur l'unique valeur mesurée de  $z$  est l'écart-type des  $N$  valeurs simulées de  $z$ .

## 4 Régression linéaire

### 4.1 Principe

#### 😊 Définition : Régression linéaire (ou plutôt affine)


Prenons des listes de mesures  $x$  et  $y$  avec leurs incertitudes. La régression linéaire est une opération mathématique qui consiste à trouver les meilleurs coefficients  $a$  et  $b$  tels que  $ax_i + b$  soient les plus proches en moyenne des points de mesures  $y_i$ .

Supposons que l'on cherche à vérifier un modèle  $y = ax + b$  et que l'on ait, après expérience, un ensemble de valeurs expérimentales  $\{x_i\}$  et  $\{y_i\}$  qui possèdent chacun une certaine variabilité. La régression linéaire simple permet, à partir de l'ensemble des points expérimentaux, de trouver UNE valeur de  $a$  et UNE valeur de  $b$ .

On peut représenter sur le même graphe, les points expérimentaux avec leurs barres d'incertitudes-types, et la droite de régression. On pourra constater (ou non) que la droite de régression « passe » par les barres d'incertitudes.

### 4.2 Mise en œuvre de la simulation Monte-Carlo

Considérons que nous avons une série de  $m$  mesures de couples  $(x_i, y_i)$ , chacun étant dans un intervalle de demi-largeur  $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ . Pour estimer l'incertitude-type du coefficient directeur  $a$  et de l'ordonnée à l'origine  $b$ , il faudrait réaliser des ensembles de nouvelles mesures  $\{x_i\}$  et  $\{y_i\}$  puis réaliser une nouvelle régression linéaire. En réalisant un grand nombre de fois cette opération, on obtiendra, en prenant les écarts-types, les valeurs des incertitudes-types sur les paramètres  $a$  et  $b$ . Un tel procédé est bien trop long et donc peu pratique. On utilise alors la méthode de Monte-Carlo.

 **À retenir : Simulation Monte-Carlo**

But : déterminer les incertitudes-types sur  $a$  et  $b$  du modèle  $y = ax + b$ .

1. Créer deux listes vides pour stocker les pentes et les ordonnées à l'origine des régressions.
2. Réaliser  $N$  (nombre très grand) simulations, pour chacune :
  - Réaliser un tirage aléatoire de  $m$  couples  $(X_i, Y_i)$ , donné par une loi de probabilité uniforme, avec  $X_i$  entre  $x_i - \Delta x_i$  et  $x_i + \Delta x_i$ , et  $Y_i$  entre  $y_i - \Delta y_i$  et  $y_i + \Delta y_i$ .
  - Réaliser une régression linéaire sur cet ensemble de valeurs ( $m$  couples  $(X_i, Y_i)$ ).
  - Ajouter dans les listes la pente et l'ordonnée à l'origine de cette régression.
3. Calculer les moyennes des deux listes des pentes et des ordonnées à l'origine pour obtenir les valeurs de  $a$  et  $b$ .
4. Calculer les écarts-types des deux listes des pentes et des ordonnées à l'origine pour obtenir les incertitudes-types de  $a$  et  $b$ .

# Table des matières

- 1 Mesures et incertitudes**
  - 1.1 Variabilité de la mesure
  - 1.2 Comparaison de deux mesures
- 2 Plusieurs mesures : évaluation de type A de l'incertitude**
- 3 Mesure unique : évaluation de type B de l'incertitude**
  - 3.1 Évaluation de type B
  - 3.2 Composition des incertitudes
  - 3.3 Simulation Monte-Carlo
- 4 Régression linéaire**
  - 4.1 Principe
  - 4.2 Mise en œuvre de la simulation Monte-Carlo