MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2025/2026.

Corrigé du DL n° 5.

1 Problème : polynômes de Tchébychev

1.1 Partie 1

1. S'il existe deux polynômes T_{1_n} et T_{2_n} vérifiant la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \tag{1}$$

alors $T_{1_n} - T_{2_n}$ admet tous les $\cos\theta$ pour racines donc est nul. Ceci prouve l'unicité du polynôme T_n (cette preuve vaut également pour Q_n). Le développement de la formule de Moivre (grâce à la formule du binôme)

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

permet d'obtenir, en séparant partie réelle et partie imaginaire,

$$\cos n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}\theta \sin^{2p}\theta$$

et

$$\sin n\theta = \sin\theta \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \cos^{n-2p-1}\theta \sin^{2p}\theta.$$

Puisque, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, on peut choisir

$$T_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p X^{n-2p}(1-X^2)^p,$$

$$Q_n = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p X^{n-2p-1} X^p.$$

2. T_n est une somme de polynômes de degré n donc il est au plus de degré n. Le coefficient de X^n est

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p}$$

qui est non nul donc T_n est de degré n.
Si x est une racine de T_n appartenant à $[-1;1]$, alors on peut l'écrire $x = \cos\theta$ avec $\cos(n\theta) = 0$ (d'après la définition de T_n). On obtient comme racines les $x_k = \cos\left(\frac{\pi/2 + k\pi}{n}\right)$ qui sont toutes différentes pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Ainsi, puisque T_n est de degré n, ces n racines sont les seules racines de T_n. De plus, elles sont simples.
De même, Q_n est de degré $n-1$ et ses racines sont les $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

3. Notons $U = 2XT_n - T_{n-1}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$U(\cos\theta) = 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta).$$

On retrouve la relation caractérisant T_{n+1} donc $U = T_n$, ce qu'on voulait démontrer. Les autres relations se démontrent de même.

4. En dérivant $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on obtient $\sin\theta T_n'(\cos\theta) = n\sin(n\theta)$ donc $\frac{1}{n}T_n'$ vérifie la relation caractérisant Q_n d'où

$$T_n' = nQ_n.$$

En dérivant $\sin\theta Q_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)$, on obtient

$$n\cos(n\theta) = \cos\theta Q_n(\cos\theta) - \sin^2\theta Q_n'(\cos\theta) = \cos\theta Q_n(\cos\theta) - (1-\cos^2\theta)Q_n'(\cos\theta)$$

d'où

$$nT_n = XQ_n - (1-X^2)Q_n'.$$

5. (a) Les variations de T_n sont données par le signe de $Q_n = (X-y_1)(X-y_2)\dots(X-y_{n-1})$ où les y_k ont été définis précédemments. On obtient, selon la parité de n, des tableaux de variation différents : par exemple, si n est pair,

x	$-\infty$		-1		x_n		y_{n-1}		x_{n-1}		y_{n-2}	$\dots$	x_2		y_1		x_1		1		$+\infty$
$T_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\ddots$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On a $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$. On obtient le graphe suivant :

(b) La plus grande valeur de $|T_n|$ ne peut être obtenue qu'en les y_k ou aux bornes de l'intervalle. Or, $|T_n(y_k)| = |T_n(1)| = |T_n(-1)| = 1$ donc $M_n = 1$.

(c) Le nombre de solutions de $|T_n(x)| = 1$ est $n+1$ (les y_k, 1 et -1) car, pour x n'appartenant pas à l'intervalle $[-1;1]$, les variations de T_n montrent que $|T_n(x)| > 1$.

6. (a) On a $T_n' = nQ_n$ donc $T_n'' = nQ_n'$. Or, $(X^2-1)Q_n' = XQ_n - nT_n = \frac{X}{n}T_n' - nT_n$, donc

$$(X^2-1)T_n'' + XT_n' = n^2T_n.$$

(b) D'après la formule obtenue à la première question, T_n a la parité de n.

(c) On peut donc poser

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k X^{n-2k}$$

qui ne contient que les monômes de même parité que n (les autres coefficients sont nuls). En calculant le terme en X^{n-2k} dans l'équation différentielle vérifiée par T_n, on obtient

$$4k(n-k)a_k = -(n-2k+2)(n-2k+1)a_{k-1}.$$

(d) $a_0 = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n \\ 2p \end{pmatrix} = \frac{1}{2}((1+1)^n - (1-1)^n) = 2^{n-1}$.

(e) On montre alors par récurrence que

$$a_k = (-1)^k 2^{n-2k-1} \frac{n}{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}.$$

La première question assure que les a_k sont des entiers.

7. On obtient Q_n en dérivant T_n (et en simplifiant *un peu* le coefficient binomial) :

$$Q_n = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k 2^{n-2k-1} \begin{pmatrix} n-1-k \\ k \end{pmatrix} X^{n-1-2k}.$$

1.2 Partie 2

1. (a) D'après les résultats précédents, $\lambda = \frac{1}{a_0} = 2^{1-n}$.

(b) D'après les résultats de la partie précédente, X contient -1, 1 et les y_k pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Ainsi, $card(X) = n+1$. Notons que $f(\lambda T_n) = 2^{1-n}$.

(c) Soient $x \in X$ et P un polynôme de E_n vérifiant $f(P) < 2^{1-n}$. Si $\lambda T_n(x) = 2^{1-n}$, alors $(P - \lambda T_n)(x) \leqslant f(P) - 2^{1-n} < 0$. Si $\lambda T_n(x) = -2^{1-n}$, alors $(P - \lambda T_n)(x) > 0$. On obtient le tableau de signe suivant pour $P - \lambda T_n$:

x	-1	y_{n-1}	y_{n-2}	y_{n-3}	$\dots$	y_2	y_1	1
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
T_n	1	-1	1	-1	$\dots$	1	-1	1
$P - \lambda T_n$	$-$	$+$	$-$	$+$	$\dots$	$-$	$+$	$-$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $P - \lambda T_n$ admet au moins n racines sur le segment $[-1;1]$. Puisque ce polynôme est de degré au plus $n-1$ (différence de deux polynômes unitaires), il est nul et $P = \lambda T_n$. Ceci contredit l'hypothèse $f(P) < f(\lambda T_n)$.

(d) On en déduit que

$$f(\lambda T_n) = 2^{1-n} = \min\{f(P),\ P \in E_n\}.$$

2. (a) Les racines de $|P(x)| = \alpha$ sont soit des racines de P' (extremums locaux, au plus $n-1$ distinctes), soit les bornes de l'intervalle, -1 et 1. Comme cette équation doit avoir $n+1$ racines, les racines de P' sont toutes racines de $|P(x)| = \alpha$ et on doit avoir

$$|P(1)| = |P(-1)| = \alpha.$$

(b) Soit $Q = P^2 - \alpha^2$. 1 et -1 sont clairement racines de Q. De plus, si $P'(t) = 0$, alors $Q(t) = 0$ (P admet un extremum en t) et $Q'(t) = 2P(t)P'(t) = 0$ donc t est racine de Q d'ordre au moins 2.

(c) D'après les questions précédentes, P' n'a que des racines simples, donc on peut l'écrire

$$P' = a \prod_{i=1}^{n-1} (X - t_i),$$

avec les t_i dans $]-1,1[$. Avec ces notations, Q est divisible par $(X-1)$, $(X+1)$ et $(X-t_i)^2$. Ainsi,

$$(X-1)(X+1) \prod_{i=1}^{n-1} (X - t_i)^2$$

divise Q. Puisque ces deux polynômes sont de degré $2n$,

$$Q = k(X-1)(X+1)\prod_{i=1}^{n-1}(X-t_i)^2 = k(X^2-1)P'^2.$$

Le calcul du terme en X^{2n} donne $k = \frac{1}{n^2}$ donc

$$Q = \frac{1}{n^2}(X^2-1)P'^2.$$

(d) Il suffit de remplacer Q par $P^2-\alpha^2$ et de prendre la racine carrée des fonctions polynomiales pour obtenir le résultat.

(e) On a $y(t) = \arccos\left(\frac{P(\cos t)}{\alpha}\right)$ donc y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ne contenant pas les racines de $|P(\cos(t))| = \alpha$. Sur un tel intervalle, on a

$$P(\cos t) = \alpha\cos(y(t))$$

donc

$$-(\sin t)P'(x) = -\alpha y'(t)\sin(y(t)).$$

Mais on a également

$$\sqrt{\alpha^2 - P^2(x)} = \pm\sin(y(t)).$$

Ainsi, avec (d), on obtient

$$y'(t) = \pm n.$$

(f) On peut intégrer le résultat obtenu dans la question précédente, toujours sur le même type d'intervalle : $y(t) = \pm nt + K$, où $K \in \mathbb{R}$. Or, si $t=0$, $x=1$ donc $P = \pm\alpha$ et donc $y = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $y = \pm nt + k\pi$ et

$$P(\cos t) = \alpha\cos(\pm nt + k\pi) = \pm\alpha\cos(nt).$$

Il existe donc un intervalle sur lequel le polynôme $P/\alpha - T_n$, ou le polynôme $P/\alpha + T_n$ est nul, et donc on a

$$P = \pm\alpha T_n.$$