6.8.1 Fonction d'onde-Exercice 4

---

a-Retrouver la relation de dispersion d'une particule libre quantique de masse m.

b-On considère que l'état de la particule quantique est représenté par un paquet d'ondes formé d'ondes planes progressives dont les vecteurs d'onde sont distribués autour d'une valeur moyenne k_0 avec une dispersion Δk qui détermine l'extension spatiale initiale Δx_0 du paquet d'ondes à l'instant t = 0. La pulsation moyenne correspondant à k_0 est notée ω_0.

- Rappeler la définition de la vitesse de groupe v_{g0} et déterminer son expression.
- Montrer en utilisant la relation de dispersion qu'à la largeur Δk correspond une dispersion de la vitesse de groupe Δv_g autour de la valeur moyenne v_{g0}. Exprimer Δv_g en fonction de □, m et Δx_0.
- En déduire la largeur du paquet d'ondes $\Delta x(t)$ après un déplacement d'une durée t depuis l'origine. Déterminer l'instant t_0 pour lequel la largeur du paquet d'ondes a doublé.
- Calculer t_0 pour :
  - un électron de masse $m = 10^{-30}$ kg initialement confiné dans un atome $\Delta x_0 = 10^{-10}$ m.
  - une gouttelette d'eau de rayon égal à 10 µm et de masse $m = 4.10^{-12}$ kg

---

6.8.1 Fonction d'onde-Exercice 4

---

a-Pour une particule libre se déplaçant dans le sens positif de Ox : $\Psi^{+}_{es}(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$

La partie spatiale $\varphi(x) = Ae^{ikx}$ est solution de : $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = E\varphi(x)$ avec $E = \hbar\omega$

Donc : $-\dfrac{\hbar^2}{2m}(-k^2 Ae^{ikx}) = \hbar\omega Ae^{ikx}$ d'où la relation de dispersion : $\boxed{\omega = \dfrac{\hbar k^2}{2m}}$

b-• $v_{g0} = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$ ce qui donne ici : $\boxed{v_{g0} = \dfrac{\hbar k_0}{m}}$

On considère les extrémités du spectre en vecteur d'onde :

$v_{g\,max} = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{k_0+\frac{\Delta k}{2}} = \dfrac{\hbar}{m}(k_0 + \dfrac{\Delta k}{2})$ $\qquad$ $v_{g\,min} = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{k_0-\frac{\Delta k}{2}} = \dfrac{\hbar}{m}(k_0 - \dfrac{\Delta k}{2})$

Donc : $\boxed{\Delta v_g = v_{g\,max} - v_{g\,min} = \dfrac{\hbar\Delta k}{m}}$

<u>Inégalité de Heisenberg spatiale</u> : $\Delta x.\Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2}$ avec $p = \hbar k$ et $\Delta x = \Delta x_0$ car on se place pour l'instant à t = 0

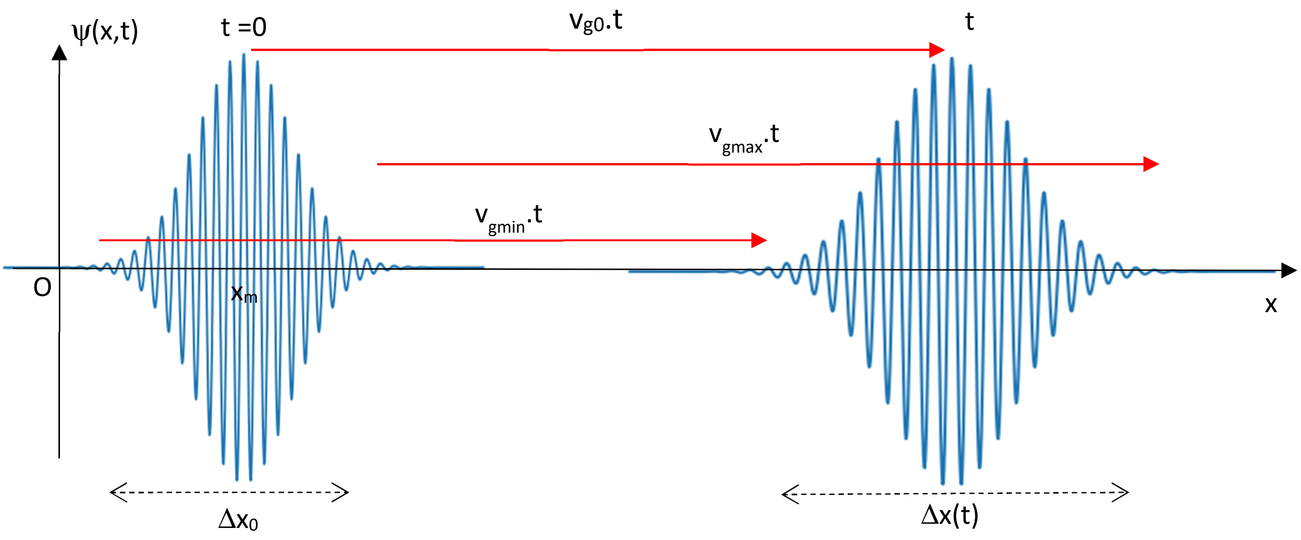
Donc : $\Delta x_0.\Delta k \geq \dfrac{1}{2}$ => $\Delta x_0.\dfrac{m\Delta v_g}{\hbar} \geq \dfrac{1}{2}$ On se place à la limite de l'égalité : $\boxed{\Delta v_g = \dfrac{\hbar}{2m\Delta x_0}}$

• A t = 0, le paquet d'ondes se situe entre $x_m - \dfrac{\Delta x_0}{2}$ et $x_m + \dfrac{\Delta x_0}{2}$

Pendant la durée t : - l'avant du paquet d'onde se déplace de $v_{gmax}.t$ donc se situe en $x_m + \dfrac{\Delta x_0}{2} + v_{g\,max}\,t$

- l'arrière du paquet d'onde se déplace de $v_{gmin}.t$ donc se situe en $x_m - \dfrac{\Delta x_0}{2} + v_{g\,min}\,t$

Donc : $\Delta x(t) = x_m + \dfrac{\Delta x_0}{2} + v_{g\,max}\,t - \left(x_m - \dfrac{\Delta x_0}{2} + v_{g\,min}\,t\right) = \Delta x_0 + \Delta v_g\,t$ soit : $\boxed{\Delta x(t) == \Delta x_0 + \dfrac{\hbar}{2m\Delta x_0}t}$



$\Delta x(t_0) = \Delta x_0 + \dfrac{\hbar}{2m\Delta x_0}t_0 = 2\Delta x_0$ d'où : $\boxed{t_0 = \dfrac{2m\Delta x_0^2}{\hbar}}$

• <u>électron</u> : $t_0 = 2.10^{-16}$ s — Le paquet d'onde s'étale très vite, on ne peut pas traiter l'électron comme une particule localisée. C'est une particule quantique.

<u>gouttelette</u> : $t_0 = 8.10^{12}$ s — Le paquet d'onde ne s'étale pas à échelle humaine, la gouttelette est localisée. C'est un système classique.
