6.8.2 Puits-Exercice 3

On étudie l'évolution d'une particule, de masse m, piégée dans un puits de potentiel infini de largeur a : $V(x) = 0$ pour $0 < x < a$ et $V(x)$ infini en dehors de cet intervalle.
On considère un état stationnaire de la particule, d'énergie E_n, associé à une fonction d'onde de la forme :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{où } n = 1, 2, 3\ldots$$

a-Donner la valeur de l'énergie E_n. On pose $E_1 = \hbar\omega_0$. Exprimer ω_0 en fonction de a, m et $\hbar$ puis E_n en fonction de n, $\hbar$ et ω_0.

b-On considère l'état décrit par la fonction d'onde $\psi_n(x,t)$ telle que $\psi_n(x,t=0) = \varphi_n(x)$. Exprimer $\psi_n(x,t)$.

c-On considère maintenant l'état décrit par la fonction $\psi(x,t)$ telle $\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))$.

- En utilisant le résultat de la question précédente, donner l'expression de $\psi(x,t)$ pour $t > 0$.
- On définit les deux états suivants : $\varphi_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))$ et $\varphi_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))$

  Exprimer $\psi(x,t)$ en fonction de $\varphi_d(x)$ et $\varphi_g(x)$.
  En déduire l'expression de la densité de probabilité de présence $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$. Montrer qu'elle oscille à une fréquence ν que l'on exprimera en fonction de ω_0, puis en fonction de E_2, E_1 et h.
- Représenter l'allure de $\varphi_d(x)$, de $\varphi_g(x)$ et des densités de probabilités de présence associées. En déduire l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule en fonction du temps.

6.8.2 Puits-Exercice 3

---

a-On reporte $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a})$ dans l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = E\varphi(x) \quad => \quad \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin(\frac{n\pi x}{a}) = E\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}) \quad => \quad \boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

Puis : $\boxed{E_n = n^2\hbar\omega_0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}}$

b-On a : $\boxed{\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a})e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a})e^{-in^2\omega_0 t}}$

c-• $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]$ donc $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(x)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \varphi_2(x)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right]$

donc : $\boxed{\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{a}}\left[\sin(\frac{\pi x}{a})e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \sin(\frac{2\pi x}{a})e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right] = \sqrt{\frac{1}{a}}\left[\sin(\frac{\pi x}{a})e^{-i\omega_0 t} + \sin(\frac{2\pi x}{a})e^{-i4\omega_0 t}\right]}$

• En combinant les définitions de $\varphi_d(x)$ et $\varphi_g(x)$, on a : $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_g(x) + \varphi_d(x))$

et : $\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_g(x) - \varphi_d(x))$

On remplace dans $\Psi(x,t)$: $\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[(\varphi_g(x) + \varphi_d(x))e^{-i\omega_0 t} + (\varphi_g(x) - \varphi_d(x))e^{-i4\omega_0 t}\right]$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_g(x)(e^{-i\omega_0 t} + e^{-i4\omega_0 t}) + \varphi_d(x)(e^{-i\omega_0 t} - e^{-i4\omega_0 t})\right]$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_g(x)e^{-i\frac{5}{2}\omega_0 t}(e^{i\frac{3}{2}\omega_0 t} + e^{-i\frac{3}{2}\omega_0 t}) + \varphi_d(x)e^{-i\frac{5}{2}\omega_0 t}(e^{i\frac{3}{2}\omega_0 t} - e^{-i\frac{3}{2}\omega_0 t})\right]$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{5}{2}\omega_0 t}\left[\varphi_g(x)2\cos(\frac{3}{2}\omega_0 t) + \varphi_d(x)2i\sin(\frac{3}{2}\omega_0 t)\right]$$

Finalement : $\boxed{\Psi(x,t) = e^{-i\frac{5}{2}\omega_0 t}\left[\varphi_g(x)\cos(\frac{3}{2}\omega_0 t) + i\varphi_d(x)\sin(\frac{3}{2}\omega_0 t)\right]}$

Puis : $P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \varphi_g^2(x)\cos^2(\frac{3}{2}\omega_0 t) + \varphi_d^2(x)\sin^2(\frac{3}{2}\omega_0 t)$

$P(x,t) = \varphi_g^2(x)\frac{1}{2}(1 + \cos(3\omega_0 t)) + \varphi_d^2(x)\frac{1}{2}(1 - \cos(3\omega_0 t))$ en linéarisant

Donc : $\boxed{P(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_g^2(x) + \varphi_d^2(x)) + \frac{1}{2}(\varphi_g^2(x) - \varphi_d^2(x))\cos(3\omega_0 t)}$

$P(x,t)$ oscille à la pulsation $3\omega_0$ entre les valeurs $P(x,0) = \varphi_g^2(x)$ et $P(x,\frac{T}{2}) = \varphi_d^2(x)$

La particule oscille entre le coté gauche du puits et le coté droit (voir courbes).

La fréquence est : $\boxed{\nu = \frac{3\omega_0}{2\pi} = \frac{E_2 - E_1}{h}}$

6.8.2 Puits-Exercice 3