

1 (Somme de 2 ondes) :

1°) Cherchons déjà les vecteurs de Poynting :

Même si ce n'est pas demandé, pour y voir bien clair, on peut écrire les champs partout : en posant $\vec{k}_1 = \frac{\omega_1}{c} \vec{u}$ et $\vec{k}_2 = \frac{\omega_2}{c} \vec{u}$, on a :

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{10} \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) ;$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}_{10}}{c} \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) ;$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{20} \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) ;$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}_{20}}{c} \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) ;$$

On peut choisir $\vec{u} = \vec{u}_x$, d'où :

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{10} \cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{c} x + \varphi_1\right) ;$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_{10}}{c} \cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{c} x + \varphi_1\right) ;$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{20} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2}{c} x + \varphi_2\right) ;$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_{20}}{c} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2}{c} x + \varphi_2\right) ;$$

Et on se place en un x_0 tel que $-\frac{\omega_1}{c} x_0 + \varphi_1 = 0$ et $-\frac{\omega_2}{c} x_0 + \varphi_2 = \theta$.

D'où

$$\vec{E}_1(\vec{r}_0, t) = \vec{E}_{10} \cos(\omega_1 t) ;$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}_0, t) = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_{10}}{c} \cos(\omega_1 t) ;$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}_0, t) = \vec{E}_{20} \cos(\omega_2 t + \theta) ;$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}_0, t) = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_{20}}{c} \cos(\omega_2 t + \theta) ;$$

$$\vec{\pi}_1(\vec{r}_0, t) = \frac{\vec{E}_1(\vec{r}_0, t) \wedge \vec{B}_1(\vec{r}_0, t)}{\mu_0} = \frac{\|\vec{E}_{10}\|^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega_1 t) \vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}_2(\vec{r}_0, t) = \frac{\vec{E}_2(\vec{r}_0, t) \wedge \vec{B}_2(\vec{r}_0, t)}{\mu_0} = \frac{\|\vec{E}_{20}\|^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega_2 t + \theta) \vec{u}_x$$

Et pour les valeurs moyennes :

$$\langle \vec{\pi}_1 \rangle = \frac{\|\vec{E}_{10}\|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$\text{et } \langle \vec{\pi}_2 \rangle = \frac{\|\vec{E}_{20}\|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x.$$

2°) Calculons maintenant le vecteur de Poynting total : $\vec{\pi}(\vec{r}_0, t) = \frac{\vec{E}_{tot}(\vec{r}_0, t) \wedge \vec{B}_{tot}(\vec{r}_0, t)}{\mu_0}$.

$\vec{E}_{tot}(\vec{r}_0, t) = \vec{E}_{10} \cos(\omega_1 t) + \vec{E}_{20} \cos(\omega_2 t + \theta)$, les deux vecteurs faisant entre eux un angle α .

$\vec{B}_{tot}(\vec{r}_0, t) = \vec{B}_1(\vec{r}_0, t) + \vec{B}_2(\vec{r}_0, t)$, $\vec{B}_1(\vec{r}_0, t)$ et $\vec{B}_2(\vec{r}_0, t)$ faisant également entre eux un angle α .

$$\vec{\pi}(\vec{r}_0, t) = \frac{\vec{E}_1(\vec{r}_0, t) \wedge \vec{B}_1(\vec{r}_0, t)}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2(\vec{r}_0, t) \wedge \vec{B}_2(\vec{r}_0, t)}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_1(\vec{r}_0, t) \wedge \vec{B}_2(\vec{r}_0, t)}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2(\vec{r}_0, t) \wedge \vec{B}_1(\vec{r}_0, t)}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi}(\vec{r}_0, t) = \vec{\pi}_1(\vec{r}_0, t) + \vec{\pi}_2(\vec{r}_0, t) + \frac{\vec{E}_{10} \cos(\omega_1 t) \wedge \left(\frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_{20}}{c} \cos(\omega_2 t + \theta)\right)}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_{20} \cos(\omega_2 t + \theta) \wedge \left(\frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_{10}}{c} \cos(\omega_1 t)\right)}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi}(\vec{r}_0, t) = \vec{\pi}_1(\vec{r}_0, t) + \vec{\pi}_2(\vec{r}_0, t) + \frac{\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \theta)}{\mu_0 c} \vec{u}_x + \frac{\vec{E}_{20} \cdot \vec{E}_{10} \cos(\omega_2 t + \theta) \cos(\omega_1 t)}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}(\vec{r}_0, t) = \vec{\pi}_1(\vec{r}_0, t) + \vec{\pi}_2(\vec{r}_0, t) + 2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \theta) \frac{\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20}}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}(\vec{r}_0, t) = \vec{\pi}_1(\vec{r}_0, t) + \vec{\pi}_2(\vec{r}_0, t) + 2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \theta) \frac{\|\vec{E}_{10}\| \cdot \|\vec{E}_{20}\| \cos \alpha}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$\vec{\pi}(\vec{r}_0, t) = \vec{\pi}_1(\vec{r}_0, t) + \vec{\pi}_2(\vec{r}_0, t) + [\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \theta) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \theta)] \frac{\|\vec{E}_{10}\| \cdot \|\vec{E}_{20}\| \cos \alpha}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{\pi}(\vec{r}_0, t) \rangle = \frac{\|\vec{E}_{10}\|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x + \frac{\|\vec{E}_{20}\|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x + \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \theta) \rangle \frac{\|\vec{E}_{10}\| \cdot \|\vec{E}_{20}\| \cos \alpha}{\mu_0 c} + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \theta) \rangle \frac{\|\vec{E}_{10}\| \cdot \|\vec{E}_{20}\| \cos \alpha}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{\pi}(\vec{r}_0, t) \rangle = \frac{\|\vec{E}_{10}\|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x + \frac{\|\vec{E}_{20}\|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \theta) \rangle \frac{\|\vec{E}_{10}\| \cdot \|\vec{E}_{20}\| \cos \alpha}{\mu_0 c} \vec{u}_x.$$

- Si $\omega_1 \neq \omega_2$, $\langle \vec{\pi} \rangle = \langle \vec{\pi}_1 \rangle + \langle \vec{\pi}_2 \rangle$

- Si $\omega_1 = \omega_2$, $\langle \vec{\pi}(\vec{r}_0, t) \rangle = \langle \vec{\pi}_1 \rangle + \langle \vec{\pi}_2 \rangle + \frac{\|\vec{E}_{10}\| \cdot \|\vec{E}_{20}\| \cos \theta \cos \alpha}{\mu_0 c} \vec{u}_x$, c'est-à-dire $\langle \vec{\pi} \rangle \neq \langle \vec{\pi}_1 \rangle + \langle \vec{\pi}_2 \rangle$.

On est en présence d'interférences. Celles-ci ne se produisent que pour deux ondes de même fréquence. Il faut même qu'elles soient « cohérentes ».

2 Onde électromagnétique et induction.

1°) Voir ci-contre.

Puisque c'est une OPP, on a $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$.

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi\right)$$

$$2^\circ) \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{u}_z$$

3°) L'onde est localement assimilable à une onde plane, mais en réalité c'est une onde sphérique, rayonnée de façon isotrope. La puissance moyenne P_M est rayonnée de façon équitable sur toutes les portions d'une sphère centrée sur la source. A une distance d de la source, le champ électrique est d'amplitude $E_0(d)$, avec $P_M = \frac{4\pi d^2 \epsilon_0 c E_0^2(d)}{2}$. Il vient

$$E_0(d) = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{P_M}{2\pi \epsilon_0 c}} = 1,55 \cdot 10^{-3} \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

4°) On pose $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$. On a donc :

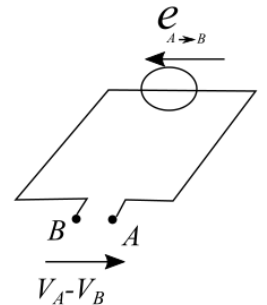
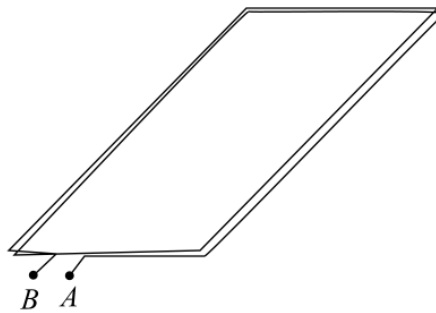
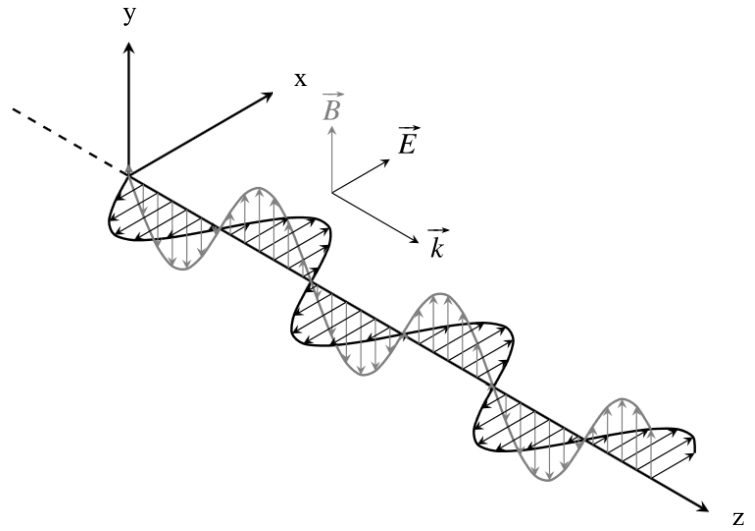
$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi\right) \vec{u}_y.$$

Une antenne rectiligne est sensible au champ électrique ; une antenne en forme de cadre est sensible au champ magnétique. Afin que la force électromotrice d'induction soit la plus importante possible, il faut que l'amplitude de variation du flux du champ magnétique à travers le cadre soit maximale. Il faut donc que le champ magnétique soit normal aux spires, donc que l'axe des spires soit parallèle à Oy.

Si on note A et B les extrémités du fil constituant les 100 spires, et e la fém orientée de A vers B. Supposons que lorsque l'on suit le fil de A jusqu'à B, on tourne dans le sens direct par rapport à Oy.

On a alors $U(t) = (V_A - V_B)(t) = -e(t) = +Na^2 \frac{dB_y}{dt}(t)$.

$$U(t) = -\frac{Na^2 E_0 \omega}{c} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi\right). \text{ Et sa valeur efficace est } U_{eff} = \frac{Na^2 E_0 \omega}{c\sqrt{2}} = 0,92 \text{ mV}.$$



3 couche anti-reflet.

$$\text{Pour } x < 0, \vec{E} = \alpha_a e^{j(\omega t - k_0 x)} \vec{u}_z \quad \text{Pour } 0 < x < e, \vec{E} = \alpha_b e^{j(\omega t - Nk_0 x)} \vec{u}_z + \alpha_c e^{j(\omega t + Nk_0 x)} \vec{u}_z \quad \text{Pour } x > e, \vec{E} = \alpha_d e^{j(\omega t - nk_0(x-e))} \vec{u}_z.$$

$$1^\circ) \text{ Pour } x < 0, \vec{B} = -\frac{\alpha_a}{c_0} e^{j(\omega t - k_0 x)} \vec{u}_y \quad \text{Pour } 0 < x < e, \vec{B} = -\frac{N\alpha_b}{c_0} e^{j(\omega t - Nk_0 x)} \vec{u}_y + N\frac{\alpha_c}{c_0} e^{j(\omega t + Nk_0 x)} \vec{u}_y$$

$$\text{Pour } x > e, \vec{B} = -n\frac{\alpha_d}{c_0} e^{j(\omega t - nk_0(x-e))} \vec{u}_y$$

En effet, pour une onde se propageant selon un vecteur \vec{u} , dans un milieu d'indice n , $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} = n \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c_0}$.

2°) Il y a continuité des champs électrique et magnétique à chaque interface. En effet le champ électrique est tangentiel, et pour le champ magnétique, tangentiel également, la continuité vient de l'absence de courants surfaciques.

La continuité du champ électrique dans le plan $x = 0$ donne $\alpha_a = \alpha_b + \alpha_c$.

La continuité du champ électrique dans le plan $x = e$ donne $\alpha_b e^{-jNk_0 e} + \alpha_c e^{jNk_0 e} = \alpha_d$

La continuité du champ magnétique dans le plan $x = 0$ donne $\alpha_a = N(\alpha_b - \alpha_c)$.

La continuité du champ magnétique dans le plan $x = e$ donne $N(\alpha_b e^{-jNk_0 e} - \alpha_c e^{jNk_0 e}) = n\alpha_d$

3°) Puisque $e^{j2k_0 e N} = \frac{(N+1)(N-n)}{(N-1)(N+n)}$, le nombre complexe du membre de gauche est réel. Puisque son module est 1, il ne peut

s'agir que de 1 ou de -1.

La solution +1 conduit à $n=1$, ce qui est faux.

La solution -1 conduit à $N = \sqrt{n}$ et à $e = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{Nk_0}$, m étant un entier naturel.

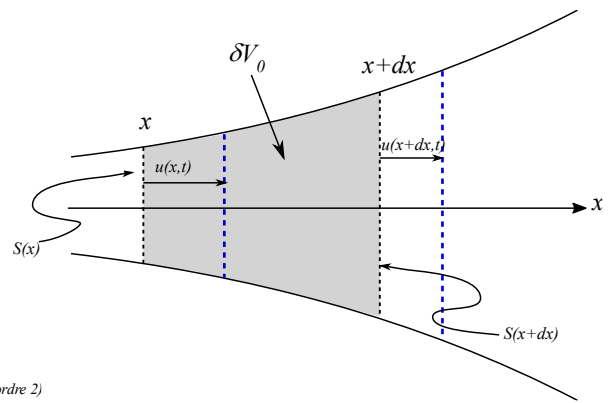
4°) Un morceau de verre traité « anti-reflet » est recouvert d'une couche de milieu d'indice $N = \sqrt{n}$ bien choisi, selon la formule établie à la question précédente. En ce qui concerne son épaisseur, l'expression de e ci-dessus ne peut être vérifiée pour toutes les couleurs qui composent la lumière blanche du soleil (k_0 dépend de la longueur d'onde). Le choix $e = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{Nk_0}$ est fait pour la couleur jaune, puisque c'est celle que perçoit le plus l'œil humain. Ainsi la lumière jaune n'est quasiment pas réfléchi, mais les autres couleurs le sont. Le complémentaire du jaune étant le violet, on observe un reflet violet.

4 (Pavillon sonore)

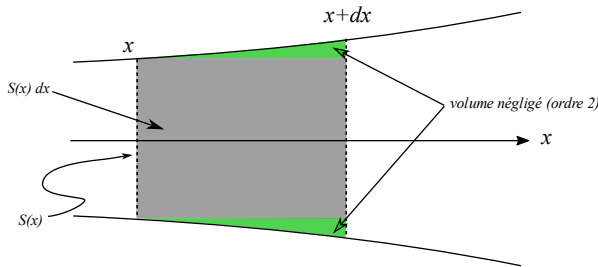
1°) Considérons le fluide (système fermé, de masse δm_0) situé au repos entre x et $x + dx$.

Son volume est environ (à l'ordre 1 en dx) :

$$\delta V_0 = S dx.$$



Le dessin ci-contre montre l'erreur qu'on fait en restant à l'ordre 1 en dx



Sous l'effet d'une onde sonore, la paroi fictive qui était en x se déplace de $u(x, t)$ et la paroi fictive de droite se déplace de $u(x + dx, t)$.

La variation du volume du système est donc :

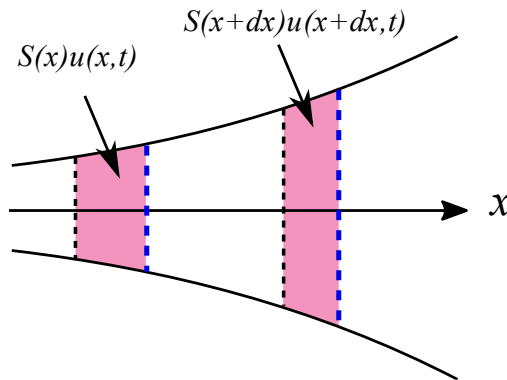
$$\delta V - \delta V_0 = S(x + dx) u(x + dx, t) - S(x) u(x, t),$$

$$= f(x + dx, t) - f(x, t)$$

avec $f(x, t) = S(x) \times u(x, t)$

$$\delta V - \delta V_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dx$$

$$\text{Soit encore } \delta V - \delta V_0 = \frac{\partial(Su)}{\partial x}(x, t) dx.$$



La variation relative de volume est $\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} = \frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x}$

Autre méthode (plus compliquée) : on peut calculer δV puis faire la différence avec δV_0 :

$$\delta V = S(x + u(x, t)) \times (x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x, t))$$

$$= S(x + u(x, t)) \times (dx + u(x + dx, t) - u(x, t))$$

$$= S(x + u(x, t)) \times \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx\right)$$

$$= S(x + u(x, t)) \times dx \times \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)$$

$$= \left[S(x) + \frac{dS}{dx}(x) \times u(x, t)\right] \times \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx\right)$$

$$= S(x) dx + S(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + \frac{dS}{dx}(x) \times u(x, t) dx +$$

$$\frac{dS}{dx}(x) \times u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$$

$$\text{Ou, plus simplement, } \delta V = S dx + S \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{dS}{dx} u dx + \frac{dS}{dx} u \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\text{C'est-à-dire } \delta V = \delta V_0 + S \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{dS}{dx} u dx + \frac{dS}{dx} u \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Or, dx est un infiniment petit d'ordre 1, et, dans le cadre de l'approximation acoustique, u aussi. Pointons les ordres en infiniment

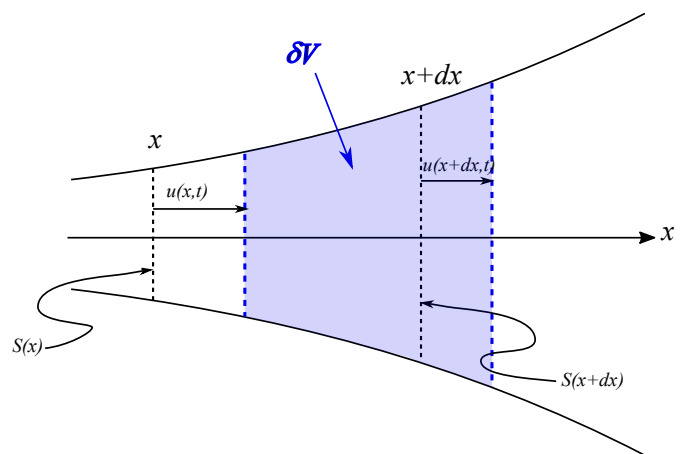
$$\text{petits : } \delta V = \delta V_0 + S \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{dS}{dx} u dx + \frac{dS}{dx} u \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & \underbrace{}_2 & & \underbrace{}_2 & & \underbrace{}_3 & & & & & \end{matrix}$$

En effet,

S et $\frac{dS}{dx}$ sont d'ordre 0,

$u, \frac{\partial u}{\partial x}, dx$ sont chacun d'ordre 1 $\frac{\partial u}{\partial x}$ d'ordre 1 car petite variation de u (d'ordre 2) sur petite variation de x (d'ordre 1)



Donc si on ne garde à droite que l'ordre 2 (et il faut garder l'ordre 2, car en faisant la différence entre δV et δV_0 , qui sont chacun d'ordre 1, mais très proches l'un de l'autre, on va tomber sur un ordre supérieur à 1, en l'occurrence un ordre 2 :

$$\delta V = \delta V_0 + S \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{dS}{dx} u dx$$

$$\text{Soit encore } \delta V = \delta V_0 + \frac{\partial(Su)}{\partial x} dx$$

2°) En appliquant le théorème de la résultante dynamique au système de la question 1, on a, comme dans le cours, en se limitant dans les calculs à l'ordre 1 en dx , puis en divisant par $S dx$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1).$$

Le coefficient de compressibilité s'écrit, à entropie constante :

$$\chi_S = -\frac{1}{\delta V_0} \frac{\delta V - \delta V_0}{P - P_0} = -\frac{1}{\rho S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \quad (2), \text{ ce qui est bien conforme à la relation de l'énoncé.}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ) (2) \text{ entraîne : } \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1}{S\chi_S} \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{dS}{dx} + S \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u}{S} \frac{dS}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial}{\partial t} \left(v \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{\chi_S} \left(v \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

la dernière transformation se faisant en utilisant le fait que la fonction $u(x, t)$ est supposée de classe au moins C^2 .

$$\text{En résumé, } \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S} \left(v \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3).$$

Si on dérive (3) par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\chi_S} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + v \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (4).$$

Si on dérive (1) par rapport au temps, on a :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5).$$

Avec (4), (5) et le théorème de Schwarz, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + v \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + v \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)} \quad (6).$$

Si on dérive (3) par rapport à t , on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right) \quad (7),$$

$$\text{ce qui donne, avec (1) : } \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right) \quad (8).$$

Si on dérive (1) par rapport à x , on a :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \quad (9).$$

$$(8) \text{ et } (9) \text{ conduisent à : } \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)} \quad (10).$$

En résumé,

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + v \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)} \quad (6).$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{d(\ln S)}{dx} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)} \quad (10).$$

4°) Le modèle utilisé est tel que : $S(x) = S_0 e^{2mx}$ où S_0 est la section en $x = 0$ et m un réel positif.

$$\text{Il vient } \ln S = \ln S_0 + 2m x, \text{ et } \frac{d(\ln S)}{dx} = 2m \quad \text{et} \quad \frac{d^2(\ln S)}{dx^2} = 0.$$

$$(6) \text{ devient } \boxed{\frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2} = c^2 \left(2m \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x^2} \right)} \quad (11)$$

$$\text{et (10) devient } \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(2m \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)} \quad (12).$$

Ces équations aux dérivées partielles sont bien les mêmes.

5°) On remplace dans (11) l'expression de la vitesse complexe fournie :

$$-\omega^2 \underline{v} = c^2 (-2mjk\underline{v} - \underline{k}^2 \underline{v}), \text{ d'où la relation de dispersion : } \boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j2m\underline{k}}.$$

6°) On doit alors poser $\underline{k} = k' + jk''$ avec k' réel positif et k'' réel.

L'équation complexe donne 2 équations réelles :

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + 2mk'' \quad \text{et} \quad 2k'k'' = -2mk'$$

Pour la seconde, la solution $k' = 0$ est sans intérêt (pas de propagation).

$$\text{On a donc } \boxed{k'' = -m} \text{ et } k'^2 = m^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - 2m^2,$$

$$\text{soit encore } \boxed{k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - m^2}.$$

On voit que si $\omega < \omega_c$, avec $\boxed{\omega_c = mc}$, k' devient imaginaire pur, ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, c'est la partie réelle de \underline{k} . On ne peut avoir propagation d'onde, avec k' réel, que pour des pulsations suffisamment importantes. La pulsation ω_c joue bien le rôle de pulsation de coupure basse.

$$\text{Numériquement, } \boxed{\omega_c = 3,4 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

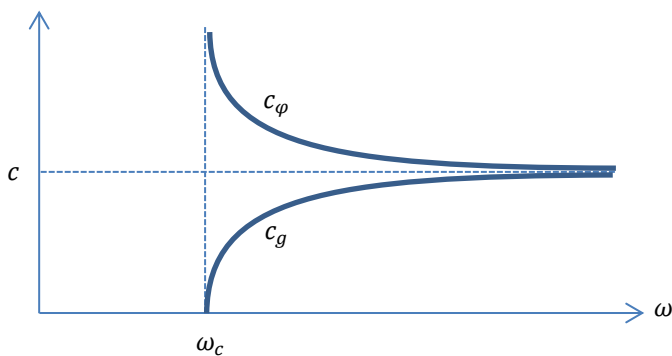
$$7°) \text{ Au-dessus de la pulsation de coupure, on a } \boxed{\underline{v} = V_0 e^{-mx} e^{j(\omega t - k'x)}}.$$

Cela représente une onde plane progressive qui s'atténue en se propageant.

8°) La relation de dispersion conduit à $k'^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$, et puisqu'on s'intéresse à l'onde qui se propage selon x croissant,

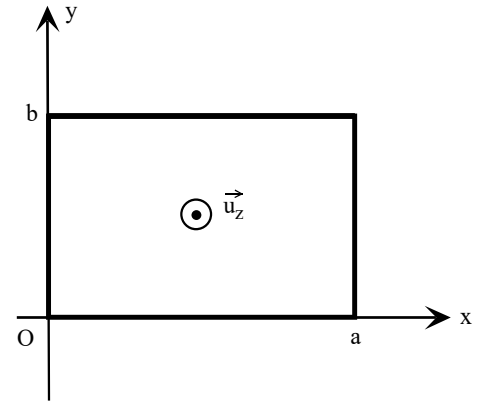
$$k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}. \text{ La vitesse de phase est } \boxed{c_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}}.$$

$$\text{La vitesse de groupe est } c_g = \frac{d\omega}{dk'}. \text{ Or, } \omega = \sqrt{k'^2 c^2 + \omega_c^2}, \text{ donc } \frac{d\omega}{dk'} = \frac{2c^2 k'}{2\sqrt{k'^2 c^2 + \omega_c^2}} = \frac{c^2 k'}{\omega}, \text{ d'où } \boxed{c_g = c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega} = \frac{c^2}{c_\varphi}}.$$



5 (guide d'ondes)

1°) Sachant que le champ électrique et le champ magnétique sont nuls dans le métal, et que les composantes tangentielle du champ électrique et normale du champ magnétique sont continues, la composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique doivent bien s'annuler sur les parois du guide.



2°)

a) A l'intérieur du guide, il n'y a rien, pas de charges, donc $\text{div} \vec{E} = 0$, ce qui

donne
$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Ainsi, le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = A(x) \vec{u}_y e^{j(\omega t - k_z z)}$.

Dans le guide, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \text{ En projetant sur l'axe des } y, \text{ cela donne } \Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0,$$

d'où
$$\frac{d^2 A}{dx^2} - k_g^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0.$$

Si $k_g^2 > \omega^2 / c^2$, alors A est en ch et sh. La condition de passage $E(0)=0$ annule le coefficient devant le ch. Et la condition de passage $E(a)=0$ annule aussi le coefficient devant le sh. Cela donne donc un champ électrique identiquement nul. Ainsi, il faut nécessairement que $k_g^2 < \omega^2 / c^2$.

A l'aide des notations de l'énoncé, on écrit : $\frac{d^2 A}{dx^2} + k_t^2 A = 0$, dont la solution s'écrit : $A(x) = \alpha \sin(k_t x)$ en raison de la condition

$E(0) = 0$. L'autre condition entraîne $k_t a = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut donc écrire
$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_{g,n}^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

b) Pour qu'il y ait propagation, il faut que $k_{g,n}$ soit réel, donc que son carré soit positif ou nul. Cela signifie $\omega^2 \geq \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2}$.

La pulsation de coupure du mode n est $\omega_{n,c} = \frac{n\pi c}{a}$. La relation de dispersion peut ainsi s'écrire : $k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{n,c}^2}{c^2}$

Application numérique : la plus petite fréquence de coupure est obtenue pour $n = 1$. Elle vaut $f_{1,c} = \frac{c}{2a} = 3\text{GHz}$.

Récapitulons : pour le mode n, $\vec{E}_n = \alpha \sin(k_t x) \cos(\omega t - k_{g,n} z) \vec{u}_y$. C'est donc une onde harmonique qui se propage selon l'axe Oz, mais dont la répartition selon Ox n'est pas uniforme. Ce n'est donc pas une onde plane. Sur l'axe Ox, il y a des nœuds (en $x=0$ et $x=a$ pour le mode fondamental, et d'autres en plus pour les modes $n > 1$) et des ventres de champ électrique.

La phase $(\omega t - k_{g,n} z)$ de l'onde (au sens large) se propage à la vitesse de phase
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_{g,n}} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{n,c}^2}} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_{n,c}^2}{k_{g,n}^2}}.$$

On voit donc que la vitesse de phase est supérieure à c.

En différenciant la relation de dispersion, on peut écrire $2k_{g,n} dk_{g,n} = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$, soit $c^2 = v_\varphi v_g$.

Il vient
$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi},$$
 ce qui montre que la vitesse de groupe est inférieure à c. C'est elle qui correspond à la vitesse de propagation de l'information.

3°) **Attention** ! : l'onde ici n'est pas plane ; on **ne peut donc pas** utiliser le vecteur nabla habituel associé aux ondes planes.

$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ peut s'écrire, en notation complexe, $\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$. En projetant sur les différents axes, cela donne $-j\omega \underline{B}_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z}$

et $-j\omega \underline{B}_z = \frac{\partial E_y}{\partial x}$, d'où $\underline{B}_x = -\frac{k_g}{\omega} \alpha \sin(k_t x) e^{j(\omega t - k_z z)}$ et $\underline{B}_z = j\frac{\alpha}{\omega} k_t \cos(k_t x) e^{j(\omega t - k_z z)}$. La composantes en x du champ magnétique

s'annule bien sur les 2 parois ($x=0$ et $x=a$), ce qui correspond bien à la continuité du champ magnétique normal. En revanche, le champ B tangentiel sera discontinu en raison des courants de surface dans les parois métalliques.

On voit donc que l'onde n'est pas transverse magnétique, car $B_z \neq 0$.

En fait, on peut décomposer l'onde en 2 OPPH polarisées rectilignement, se propageant dans 2 directions, faisant des angles $+\theta$ et

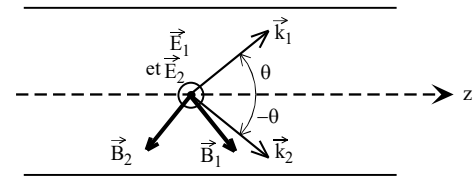
$-\theta$ par rapport à Oz : $\vec{E}_n = \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{2n}$, avec $\vec{E}_{1n} = -\frac{\alpha}{2} \sin(\omega t - (k_{g,n}z + k_t x)) \vec{u}_y = -\frac{\alpha}{2} \sin(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \vec{u}_y$ et

$$\vec{E}_{2n} = \frac{\alpha}{2} \sin(\omega t - (k_{g,n}z - k_t x)) \vec{u}_y = \frac{\alpha}{2} \sin(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \vec{u}_y.$$

En posant $\vec{k}_1 = k_t \vec{u}_x + k_{g,n} \vec{u}_z$ et $\vec{k}_2 = -k_t \vec{u}_x + k_{g,n} \vec{u}_z$.

$$\text{On a bien } \|\vec{k}_1\|^2 = \|\vec{k}_2\|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\text{L'angle } \theta \text{ d'inclinaison est donc donné par } \tan \theta = \frac{k_{g,n}}{k_t} \text{ ou } \sin \theta = \frac{k_t}{\sqrt{k_{g,n}^2 + k_t^2}}$$



6 (plasma)

$$1^\circ) \underline{\gamma} = \frac{in_0 e^2}{m\omega} \text{ (cf cours).}$$

$$2^\circ) \frac{eE_0}{m\omega^2} \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \text{ soit } E_0 \ll \frac{2\pi cm\omega}{e}.$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = \mu_0 (\underline{\gamma} - i\omega\epsilon_0) \vec{E} = -i\omega\epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\underline{\gamma}}{-i\omega\epsilon_0}\right) \vec{E} = -i\omega\epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2 \epsilon_0}\right) \vec{E} = -i\omega\epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

3°) Continuité du champ électrique tangentiel, d'où $1 + \underline{r} = \underline{t}$.

Et comme il n'y a pas de courants surfaciques, le champ magnétique, qui est aussi tangentiel, est continu lui-aussi, d'où :

$$1 - \underline{r} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \underline{t}.$$

$$\text{De ces deux équations, on tire } \underline{t} = t = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \text{ et } \underline{r} = r = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}}. \text{ Et si on pose } n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}, \underline{t} = \frac{2}{1+n} \text{ et } r = \frac{1-n}{1+n}.$$

$$R = \frac{(1-n)^2}{(1+n)^2} \text{ et } T = \frac{4n}{(1+n)^2}$$

7 (sous-marin)

Un sous-marin émet une onde électromagnétique monochromatique $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}x))$ (\underline{k} a priori complexe). On utilise des faibles fréquences ($f < 0,1$ MHz). On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹.

1°) Equations de Maxwell dans un milieu de permittivité diélectrique $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$:

$$\text{div } \vec{E} = 0; \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}; \overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

2°) On utilise la loi d'Ohm locale $\vec{J} = \gamma_0 \vec{E}$ et on remplace dans la dernière équation, ce qui donne bien : $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E} + \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

3°) En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, $\overrightarrow{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot} \vec{B})$, ou encore :

$$\overrightarrow{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}\right) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \gamma_0 \vec{E} + \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

Mais dans un conducteur ohmique, il n'y a pas de charges volumiques, d'où $\rho = 0$ et $\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

4°) Relation de dispersion $-\underline{k}^2 \vec{E} + \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 j \omega \vec{E}$, puis $\underline{k}^2 = \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} - \mu_0 \gamma_0 j \omega$.

5°) Puisque la fréquence est inférieure à 0,1 MHz, $\frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} < 2 \cdot 10^{-4}$.

Et $\mu_0 \gamma_0 j \omega < 3,2$. Et plus la fréquence est faible, plus le terme en ω^2 est petit devant l'autre.

On peut donc bien considérer que $\underline{k}^2 \approx -j \mu_0 \gamma_0 \omega$.