MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2025/2026.

DL n° 6.

Vendredi 3 avril.

À rendre le lundi 19.

Un problème d'algèbre linéaire classique

Partie 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout entier naturel n $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. On définit l'application δ de E dans E par

$$\delta(P) = P(X) - P(X-1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note δ_n la restriction de δ à E_n. **On sera particulièrement attentif au fait que certaines questions portent sur δ (donc en dimension infinie) et d'autres sur δ_n (donc en dimension finie).**

1. Montrez que δ est un endomorphisme de E.
2. Determinez le noyau de δ. Cet endomorphisme est-il injectif ?
3. En déduire le noyau de δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrez que $\operatorname{Im}(\delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. Déterminez le rang de δ_n.
6. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}(\delta_n) = E_{n-1}$. En déduire $\operatorname{Im}(\delta)$.
7. Montrez que δ^2 est surjectif. Est-il injectif ?
8. Soit $Q \in E$. Existe-t-il un polynôme P tel que $P(X) + P(X-2) - 2P(X-1) = Q(X)$? Si oui, y a-t-il unicité ?

Partie 2

Soit F l'ensemble des polynômes de E tel que $P(0) = 0$.

1. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrez que F et $\operatorname{Ker}(\delta)$ sont supplémentaires.
3. Montrez que la restriction de δ à F définie un isomorphisme de F sur E.

Partie 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la famille de polynômes $(A_0, A_1, \cdots, A_n)$ par $A_0 = 1$ et

$$\forall\, k = 1, \ldots, n,\ A_k = X(X+1)\cdots(X+k-1).$$

1. Montrez que $(A_0, A_1, \cdots, A_n)$ est une base de E_n.
2. Déterminez $\delta(A_k)$ pour $k \in \{0, 1 \cdots n\}$
3. Montrez que les coordonnées de $P \in E_n$ dans la base $(A_0, A_1, \cdots, A_n)$ sont
$$\left(P(0), \delta(P)(0), \frac{\delta^2(P)(0)}{2!}, \ldots., \frac{\delta^n(P)(0)}{n!}\right).$$
4. En déduire l'unique polynôme P de E_3 tel que $P(-3) = 2$, $P(-2) = 5$, $P(-1) = 0$ et $P(0) = 1$.

Partie 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

1. Montrez l'existence d'un unique polynôme P_k de E_n tel que $P_k(0) = 0$ et $\delta_n(P_k) = X^k$.
2. Montrez que P_k est divisible par $X + 1$ pour $k \geqslant 1$.
3. Établir que $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} q^k = P_k(n)$.
4. Montrez que
$$P_k' = kP_{k-1} + P_k'(0),$$
où P_k' désigne le polynôme dérivé de P_k.
5. On désigne par R_k le polynôme dont le polynôme dérivé est P_k et tel que $R_k(0) = 0$. Montrez que
$$P_k = kR_{k-1} + X\big(1 - kR_{k-1}(1)\big).$$
6. Calculez P_1, P_2, P_3 et P_4. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} q^k \quad$ pour $\quad k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Problème : extensions de corps et nombres algébriques

Soit L un corps, et K un sous-corps de L, *i.e.* $K \subset L$ et K est un corps pour les mêmes lois que L. On peut alors munir L d'une structure de K-espace vectoriel, où l'addition est l'addition de L, et la multiplication par les scalaires est définie pour $\lambda \in K$ et $x \in L$ par $\lambda \cdot x$, où $\cdot$ est la multiplication dans L.

Dans le cas où L est de dimension finie sur K, on dit que L est une extension finie de K, et on note $[L : K] = \dim_K(L)$.

Partie 1 : premiers exemples

1. (a) Montrez que $\mathbb{C}$ est une extension finie de $\mathbb{R}$, et déterminez $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$.
   (b) Déterminez tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contiennent $\mathbb{R}$.

2. On rappelle que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et donc un corps. Montrez que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$ et déterminez $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$.
3. Soit $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$. On admet que c'est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.
   (a) On veut montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}_2[X]$, $P \neq 0$. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{Q}_2[X]$, $P \neq 0$, tel que $P(\sqrt[3]{2}) = 0$.
      i. Montrez que P divise $X^3 - 2$.
      ii. En utilisant la forme scindée de $X^3 - 2$ dans $\mathbb{C}[X]$, aboutir à une contradiction.
   (b) En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$ et déterminez $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$.
4. Soient $k \subset K \subset L$ trois corps. On suppose que K est une extension finie de k et L une extension finie de K.

   Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une base du k-espace vectoriel K, et $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ une base du K-espace vectoriel L. Montrez que $(\alpha_i\beta_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base du k-espace vectoriel L.

   En déduire que L est une extension finie de k et que $[L : k] = [L : K][K : k]$.

Partie 2 : éléments algébriques

Dans cette partie, on fixe $K \subset L$ deux corps. Pour $a \in L$, on note $K[a] = \mathrm{vect}_K(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sous K-espace vectoriel du K-espace vectoriel L engendré par la famille $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'élément a est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X]$, non nul, tel que $P(a) = 0$.

1. Soit $a \in L$. Montrez que $K[a] = \{P(a) \mid P \in K[X]\}$. En déduire que $K[a]$ est un sous-anneau de L. Montrez que c'est le plus petit anneau de L contenant K et a, *i.e.* que si A est un sous-anneau de L tel que $a \in A$ et $K \subset A$, alors $K[a] \subset A$.
2. Soit $a \in L$. Montrez que a est algébrique sur K si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1, a, \cdots, a^n)$ soit liée dans le K-espace vectoriel L.

Si $a \in L$ est algébrique sur K, on appelle degré de a sur K le plus petit entier d tel que $(1, a, \cdots, a^d)$ soit liée dans le K-espace vectoriel L.

3. Montrez que $a \in L$ est algébrique sur K de degré 1 si et seulement si $a \in K$.
4. Montrez que si L est une extension finie de K, alors tout élément $a \in L$ est algébrique sur K de degré inférieur ou égal à $[L : K]$.
5. Soit $a \in L$ algébrique sur K de degré d.
   (a) Montrez que $(1, a, \cdots, a^{d-1})$ est une K-base de $K[a]$, *i.e.* une base du K-espace vectoriel $K[a]$.
   (b) Soit $b \in K[a]$, et soit $\begin{array}{rccc} f_b : & K[a] & \longrightarrow & K[a] \\ & x & \longmapsto & bx \end{array}$. Montrez que si $b \neq 0$, alors f_b est un automorphisme du K-espace vectoriel $K[a]$.
   (c) En déduire que $K[a]$ est un sous-corps de L, et que c'est le plus petit sous-corps de L contenant a et K.
   (d) Montrez que $K[a]$ est une extension finie de K et déterminez $[K[a] : K]$.
   (e) Montrez que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

La notation $K(a)$ désigne le plus petit sous-corps de L contenant K et a. Lorsque a est algébrique, on a donc $K[a] = K(a)$, d'où les notations $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ etc...

(f) Soit $a \in L$, $a \neq 0$. Montrez qu'il y a équivalence entre :

  i. $K[a]$ est un sous-corps de L.
  ii. $a^{-1} \in K[a]$.
  iii. a est algébrique sur K.

Partie 3 : polynôme minimal d'un élément algébrique

Dans cette partie, on considère deux corps $K \subset L$. On considère un élément $a \in L$, algébrique sur K de degré d.

On note $I_a = \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Comme a est algébrique, I_a n'est pas réduit au polynôme nul. On note q le plus petit degré d'un polynôme $P \neq 0$ de I_a : $q = \min\left(\{\deg(P) \mid P \in I_a,\ P \neq 0\}\right)$.

1. Montrez que I_a contient un unique polynôme unitaire de degré q.

   On l'appelle polynôme minimal de a, et on le note μ_a.

2. Montrez que μ_a est irréductible dans $K[X]$, et que $I_a = \{\mu_a Q \mid Q \in K[X]\}$.
3. Montrez que $q = d$.
4. Quel est le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ sur $\mathbb{Q}$?
5. Montrez que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et déterminez le degré de son polynôme minimal.

Partie 4 : nombres algébriques

Dans cette partie, un nombre algébrique est un nombre complexe algébrique sur $\mathbb{Q}$. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques :

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{a \in \mathbb{C} \mid \exists\, P \in \mathbb{Q}[X] \mid P \neq 0,\ P(a) = 0\}\,.$$

1. Soient $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$. On rappelle que $\mathbb{Q}[a]$ est un corps, et on note $\mathbb{Q}[a,b] = (\mathbb{Q}[a])[b]$.
   (a) Montrez que $\mathbb{Q}[a,b]$ est un corps, et que c'est une extension finie de $\mathbb{Q}$.
   (b) Exemple : montrez que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\}$.
2. Montrez que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.