C9-1 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Produit mixte, produit vectoriel

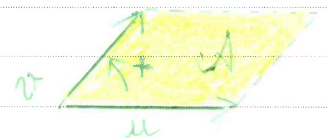
§V CAS DE LA DIMENSION 3

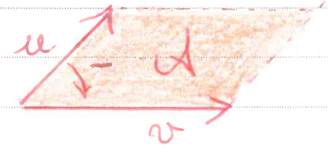
§V.1 PRODUIT MIXTE

Produit mixte = généralisation en dimension quelconque (finie) de:

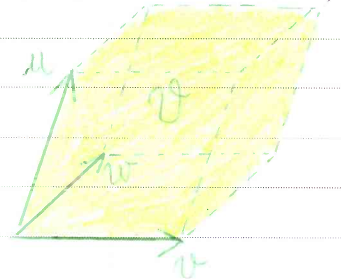
- aire algébrique d'un parallélogramme en dim. 2
- volume algébrique d'un parallélépipède en dim. 3.

Algébrique : + si associé à une base directe
− " " " " " indirecte.





$[u,v] = +\,\text{aire}(\mathcal{A})$ $\qquad$ $[u,v] = -\,\text{aire}(\mathcal{A})$



$[u,v,w] = +\,\text{volume}(\mathcal{V})$ car la base (u,v,w) est directe dans ce cas.

Le produit mixte est, dans les 2 cas, une forme n-linéaire alternée ; pour le généraliser, on prend le déterminant dans une BON. directe qui représentera l'hypervolume du parallélotope

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i u_i,\ (x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n \right\}$$

associé à une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de n vecteurs de E.

Problème: est-ce que $\det_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)$ dépend du choix de la base $\mathcal{B}$?
A priori oui, mais en fait, non \o/.

Propr

Formule de changement de base

Si E un $\mathbb{R}$-ev de dim. n, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases, $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, $u_1,\dots,u_n \in E$, alors:

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n) = \det(P) \times \det_{\mathcal{B}'}(u_1,\dots,u_n)$$

E n'est pas forcément euclidien

démo. Notons $X_k = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u_k)$ et $X_{k'} = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}(u_k)$

La formule de changement de base pour les vecteurs donne $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k = P X_k'$.
Si M (resp. M') est la matrice de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$), alors ses colonnes sont les X_k (resp. X_k').
On en déduit : $M = PM'$
Mais alors :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) &= \det(M) = \det(PM') \\ &= \det(P) \times \det(M') \\ &= \det(P) \times \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n). \quad ▨\end{aligned}$$

Cor. **Le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base <u>orthonormée directe</u> ne dépend pas de la base choisie.**

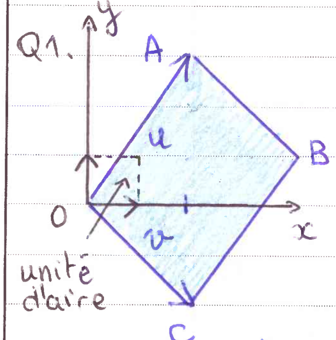
très important !

démo Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont OND, alors $\det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = +1$ car $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \in SO(n)$. ▨

Déf. <u>Produit mixte</u>
Soit E euclidien orienté de dimension n
$(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.
<u>Produit mixte</u> de $(u_1, \dots, u_n)$ = déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans n'importe quelle base orthonormée directe de E.
Notation : $[u_1, \dots, u_n]$.

exo 14

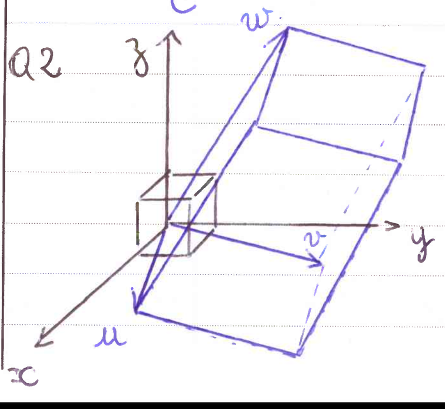
Q1.



On a $A = (2,3)$, $C = (1,-2)$.
L'aire du parallélogramme OABC vaut :

$$|[\vec{OA}, \vec{OC}]| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right| = |-7| = 7$$

Q2



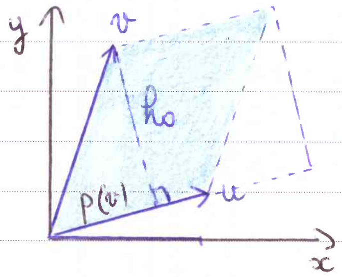
Ici $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Volume algébrique du parallélépipède (u, v, w) : $[u, v, w]$

$$[u,v,w] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \times 11$$
$$= \oplus 44.$$

base (u,v,w) directe.

Remarquons que la face (u,v) est contenue dans le plan $z=0$.
Le parallélépipède a donc pour base (u,v) et hauteur $h = z_w = 4$.
Calculons l'aire $\mathcal{B}$ de (u,v).



$$\mathcal{B} = \|u\| \times h_0$$
mais
$$h_0^2 = \|v\|^2 - \|p(v)\|^2$$
$$= \|v\|^2 - \left\| \frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2} u \right\|^2$$
$$= \|v\|^2 - \frac{\langle v,u\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$p(v)$ est le projeté de v sur la droite engendrée par le vecteur u.

Ainsi $\mathcal{B}^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2$
$$= 10 \times 17 - 7^2 = 170 - 49$$
$$= 121$$
et $\mathcal{B} = 11$.
On a bien $\mathcal{B} \times h = 44 = [u,v,w]$

§V.2 <u>PRODUIT VECTORIEL</u>

Thm

> <u>Représentation des formes linéaires</u>
> Soit E euclidien, $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
> Alors : il existe un unique vecteur $e \in E$ tq $\varphi = \langle e, \cdot \rangle$, ie : $\forall x \in E$, $\varphi(x) = \langle e, x\rangle$.

démo. Étudions l'applic° Φ : $E \longrightarrow \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$
$e \longmapsto \varphi_e$

où φ_e est la forme linéaire $x \mapsto \langle e,x\rangle$.
(φ_e est bien linéaire par linéarité à droite du produit scalaire)

càd : l'applic° Φ est correct^t définie.

* <u>Φ est une application linéaire :</u>
Soit $e_1, e_2 \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \alpha e_1 + \beta e_2$.
Alors :
$$\forall x \in E, \quad \varphi_\varepsilon(x) = \langle \alpha e_1 + \beta e_2 ; x \rangle$$
$$= \alpha \langle e_1, x\rangle + \beta \langle e_2, x\rangle$$
$$= \alpha \varphi_{e_1}(x) + \beta \varphi_{e_2}(x)$$

Autrement dit : $\varphi_\varepsilon = \alpha\varphi_{e_1} + \beta\varphi_{e_2}$
$\Phi(\varepsilon) = \alpha\Phi(e_1) + \beta\Phi(e_2)$.

* $\underline{\dim(E)} = n = n \times 1 = \underline{\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$.
* $\underline{\Phi \text{ est injective}}$:
  Soit $e \in \mathrm{Ker}(\Phi)$; alors $\varphi_e = (x \mapsto 0)$.
  En particulier, $\varphi_e(e) = 0$, donc $\langle e, e \rangle = 0$,
  d'où $e = 0_E$.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$.

Φ est donc un <u>isomorphisme</u> ; tout élément $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ admet un unique antécédent par Φ, càd : (donc <u>bijective</u>)
$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists! e \in E \,/\, \varphi = \Phi(e) = \varphi_e = \langle e, \cdot \rangle$. ▨

Prop-déf.

<u>Définition du produit vectoriel</u>
Dans E euclidien orienté de dimension 3, on fixe 2 vecteurs u, v quelconques.
1) Alors il existe un unique vecteur $e \in E$ tel que :
$\forall x \in E, \quad [u, v, x] = \langle e, x \rangle$.
2) Ce vecteur e est appelé produit vectoriel de u par v et il est noté $u \wedge v$.

démo

On remarque que $\varphi_{u,v} : x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire sur E et on applique le théorème précédent.

Propr

<u>Propriétés algébriques</u>
Antisymétrie : $\forall u, v \in E, \quad u \wedge v = -v \wedge u$
Bilinéarité : $\forall u, v, w \in E$ $\quad (\alpha u + \beta v) \wedge w = \alpha\, u \wedge w + \beta\, v \wedge w$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad u \wedge (\alpha v + \beta w) = \alpha\, u \wedge v + \beta\, u \wedge w$

démo

On montre l'antisymétrie,

Pour prouver que $u \wedge v = -v \wedge u$, il s'agit de prouver que
$\forall x \in E : \quad \langle u \wedge v, x \rangle = \langle -v \wedge u, x \rangle$.
Or :
$\forall x \in E, \quad \langle u \wedge v, x \rangle = [u, v, x]$
$= -[v, u, x]$ le déterminant est antisymétrique

$= -\langle v\wedge u, x\rangle$ ↓ déf de $v\wedge u$
$= \langle -v\wedge u, x\rangle$. ↓ lin. à gauche du pdt scalaire.

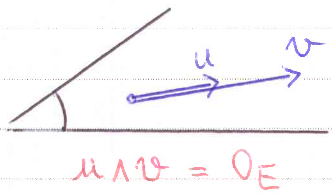
La propriété est démontrée.

Pour la linéarité à gauche, fixons $u, v, w \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Montrer que $(\alpha u+\beta v)\wedge w = \alpha u\wedge v + \beta v\wedge w$ revient à établir que
$\forall x\in E, \quad \langle (\alpha u+\beta v)\wedge w, x\rangle = \langle \alpha u\wedge v+\beta v\wedge w, x\rangle$
Or:
$\forall x\in E, \quad \langle (\alpha u+\beta v)\wedge w, x\rangle$
$= [\alpha u+\beta v, w, x]$
$= \alpha [u, w, x] + \beta [v, w, x]$
$= \alpha \langle u\wedge w, x\rangle + \beta\langle v\wedge w, x\rangle$
$= \langle \alpha u\wedge w + \beta v\wedge w, x\rangle$: c'est fait !

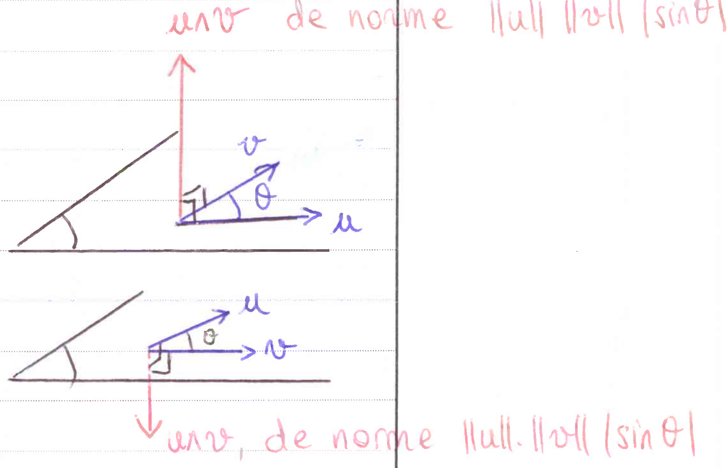
La linéarité à droite se montre de même, ou en combinant linéarité à gauche et antisymétrie.

Propr

Caractérisation géométrique du produit vectoriel



u et v sont colinéaires
$\iff u\wedge v = 0_E$



Propr.

Si (e_x, e_y, e_z) est une base orthonormée directe alors on sait calculer tous les produits vectoriels :
* 0_E si deux vecteurs identiques
* si deux vecteurs dans l'ordre
  $e_x \to e_y \to e_z \to e_x$,
  on obtient le troisième
* si deux vecteurs en sens inverse, on obtient l'opposé du troisième.

Soit $u = x\, e_x + y\, e_y + z\, e_z$
$\quad\;\; v = x'\, e_x + y'\, e_y + z'\, e_z$.

On calcule $u \wedge v$ en développant tout :

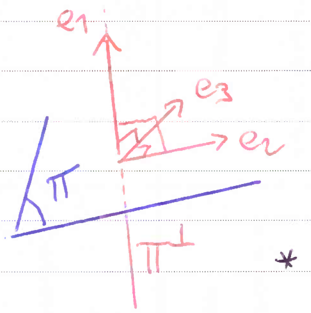
$$\begin{aligned}
u \wedge v &= (x e_x + y e_y + z e_z) \wedge (x' e_x + y' e_y + z' e_z) \\
&= x x'\, e_x \wedge e_x + y x'\, e_y \wedge e_x + z x'\, e_z \wedge e_x \\
&\quad + x y'\, e_x \wedge e_y + y y'\, e_y \wedge e_y + z y'\, e_z \wedge e_y \\
&\quad + x z'\, e_x \wedge e_z + y z'\, e_y \wedge e_z + z z'\, e_z \wedge e_z \\
&= \qquad\qquad - y x'\, e_z \qquad + z x'\, e_y \\
&\quad + x y'\, e_z \qquad\qquad\qquad - z y'\, e_x \\
&\quad - x z'\, e_y \quad + y z'\, e_x \\
&= (y z' - z y')\, e_x + (z x' - x z')\, e_y + (x y' - y x')\, e_z \\
&= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} e_x + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} e_z .
\end{aligned}$$

<u>Méthode pratique :</u>

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \overset{1}{\underset{2,\,3}{\wedge}} & \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\
x & & x' \\
y & & y'
\end{array}
= \begin{pmatrix} y z' - z y' \\ z x' - x z' \\ x y' - y x' \end{pmatrix}$$

<u>Ex 15</u> Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canoniquement.

Q1. Soit Π le plan d'équation $3x + 2y - z = 0$.
Fabriquons une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ adaptée à Π, càd que $e_2, e_3 \in \Pi$.



* Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à Π : on prend $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

* Le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à e_1, donc il est dans Π.

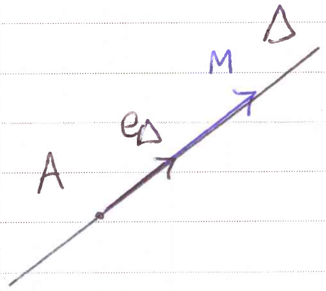
* Le vecteur $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$

est orthogonal à e_1 (donc dans Π aussi !) et à e_2.
La famille (e_1, e_2, e_3) est donc orthogonale,

directe, et adaptée à Π.

Rem: pour obtenir une b.o.n.d., il suffit de normaliser les vecteurs:
$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}e_1, \frac{1}{\sqrt{13}}e_2, \frac{1}{\sqrt{182}}e_3\right)$ convient.

Q2



Soit $A = (x_A, y_A, z_A)$
$e_\Delta = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$
Δ la droite (affine) passant par A et dirigée par e_Δ:

$$\Delta = A + \mathrm{Vect}(e_\Delta) = \{A + te_\Delta,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.
Alors:

$$M \in \Delta \iff \vec{AM} \text{ colinéaire à } e_\Delta \iff \vec{AM} \wedge e_\Delta = \vec{0}$$

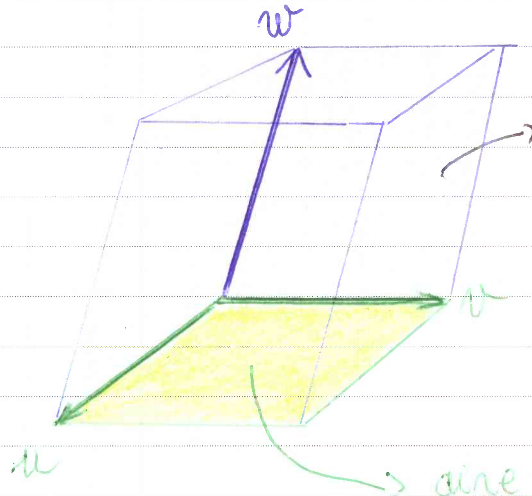
Mais:

$$\vec{AM} \wedge e_\Delta = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(y - y_A) - \beta(z - z_A) \\ \alpha(z - z_A) - \gamma(x - x_A) \\ \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) \end{pmatrix}$$

donc

$$M \in \Delta \iff \begin{cases} \gamma(y - y_A) - \beta(z - z_A) = 0 \\ \alpha(z - z_A) - \gamma(x - x_A) = 0 \\ \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0 \end{cases}$$

Liens avec aires et volumes



volume (algébrique):
$\langle u \wedge v, w \rangle$ ← produit mixte vectoriel/scalaire.
$= [u, v, w]$
$= \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$

aire (positive): $\|u \wedge v\|$