# C9-2 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien
## Isométries en dimension 3

§VI **ISOMÉTRIES VECTORIELLES EN DIMENSION 3**

E euclidien orienté de dimension qcq.

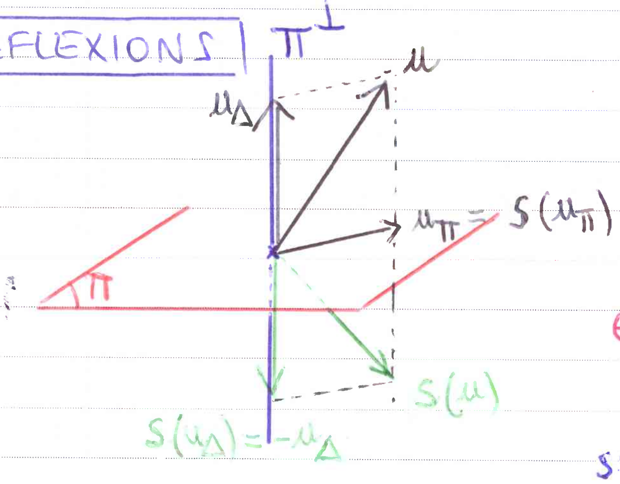
$O(E)$ isométries

- $SO(E)$ $\det(f)=+1$ isométries directes = rotations
  - symétries $f^2 = Id_E$
  - autre chose
- $O(E) \setminus SO(E)$ $\det(f)=-1$ isométries indirectes = antirotations
  - symétries $f^2 = Id_E$
  - autre chose.

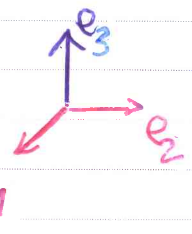
Et dans tout ça, qui au juste est diagonalisable ? symétrique ?
(au sens d'endomorphisme symétique : $\forall u, v \in E \quad \langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$.)

On va préciser tout ça dans le cas où $\dim(E) = 3$.

§VI.1. **RÉFLEXIONS**




Base adaptée




non unique : on peut faire tourner $e_1, e_2$ autour de $e_3$, voire remplacer $e_3$ par $-e_3$ et échanger $e_1$ et $e_2$.

Matrice réduite :
$$\begin{array}{c} s(e_1)\ s(e_2)\ s(e_3) \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$sp(s) = \{+1, -1\}$, $E_1(s) = Vect(e_1, e_2) = \Pi$

$E_{-1}(s) = Vect(e_3) = \Pi^\perp$

$\det(s) = 1^2 \times (-1) = -1$ $\quad tr(s) = 1+1-1 = +1$

$\chi_s = (X-1)^2(X+1)$

d'où $s \in O(E) \setminus SO(E)$

Ex 16

Soit $s$ la réflexion par rapport au plan d'équation $x+2y-z=0$.

Q1

Notons $\Delta$ la droite normale à ce plan. Elle est dirigée par $n=(1,2,-1)$.
Si $p$ est la projection orthogonale sur cette droite, $s = Id - 2p$.
On va calculer $p(\varepsilon_1)$, $p(\varepsilon_2)$, $p(\varepsilon_3)$ pour les vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de la base canonique:

$$p(\varepsilon_1) = \frac{\langle \varepsilon_1, n\rangle}{\|n\|^2} n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$p(\varepsilon_2) = \dots = \frac{}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$p(\varepsilon_3) = \dots = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

d'où
$$s(\varepsilon_1) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$s(\varepsilon_2) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\8\\-4\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$s(\varepsilon_3) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

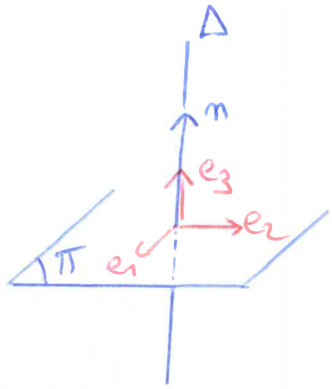
d'où $\boxed{M = \underset{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}{\mathrm{mat}}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}}$

✓ matrice symétrique !

Q2

Dans une base adaptée à $s$, la matrice de $s$ sera diagonale.
Prenons $e_3 = n = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

et $e_2 = e_3 \wedge e_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$




et normalisons ces vecteurs:
$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad e_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad e_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

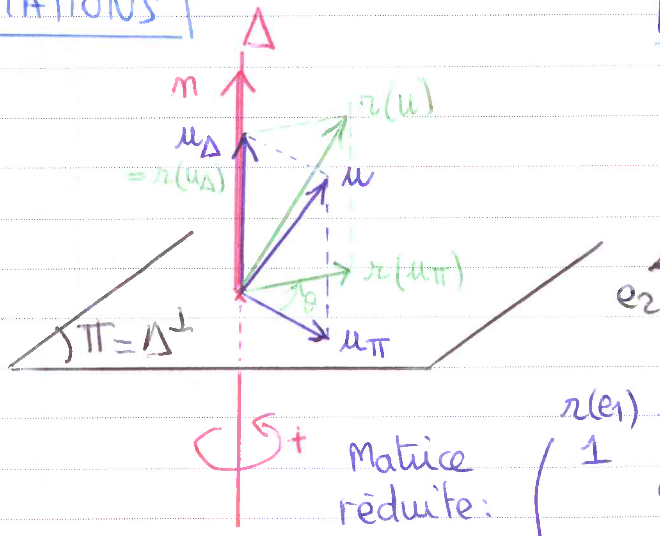
La base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est OND et

$$\underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}(s) = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix} = D.$$

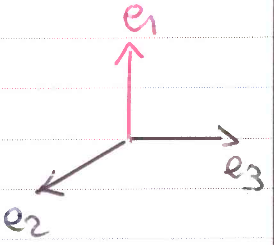
On pose $\boxed{P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\end{pmatrix}}$

alors $\boxed{P \in SO(3) \text{ et } M = PDP^{-1} = PDP^T.}$

§VI.2 **ROTATIONS**




Base adaptée




non unique, comme pour les reflexions

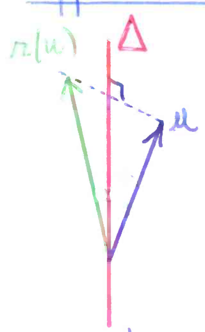
Matrice réduite : $\begin{array}{cccc} r(e_1) & r(e_2) & r(e_3) & \\ \left(\begin{matrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}\right. & & \left.\right) & \begin{matrix} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{matrix} \end{array}$

$\det(r) = +1$, $\operatorname{tr}(r) = 1 + 2\cos\theta$

$\chi_r = (X-1)(X^2 - 2\cos\theta X + 1)$

Trois cas pour les éléments propres : ⚠

* Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$ (identité) :
  $sp(r) = \{+1\}$, $E_1(r) = E$
* Si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$ (retournement) : ← C'est la symétrie orthogonale par rapport à Δ
  $sp(r) = \{+1, -1\}$, $E_1(r) = \Delta$
  $E_{-1}(r) = \Delta^\perp$
* si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$ ("vraie" rotation) :
  $sp(r) = \{+1\}$, $E_1(r) = \Delta$.




on parle aussi de "demi-tour" autour de l'axe Δ.

**Ex 17**

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $r$ la rotation d'axe Δ orienté par $n = (0,1,-1)$, d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.
Dans une BOND adaptée à $r$, sa matrice est $R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ & \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Construisons une telle base :

$e_1 = n = (0,1,-1)$ $\qquad e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$

$e_2 = (1,0,0)$ $\qquad e_2' = (1,0,0)$

$e_3 = e_1 \wedge e_2$ $\qquad e_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice de la base canonique de cette rotation est donc

$M = PRP^T$ où $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d'où :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/2 \\ 1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{3} & 1 \\ -2 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 & -1 \\ \sqrt{6} & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Vérif: c'est bien une matrice de $SO(3)$ !

· Colonnes ON ✓

· $C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -4\sqrt{6} \\ * \\ * \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ * \\ * \end{pmatrix} = +C_3$. ✓

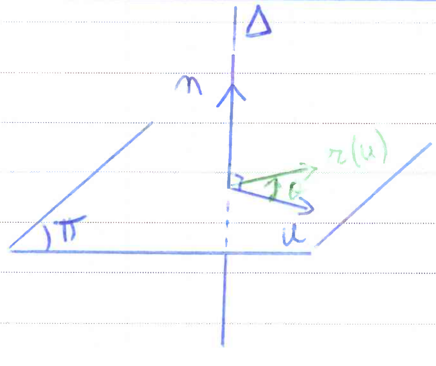
Le vecteur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a pour image

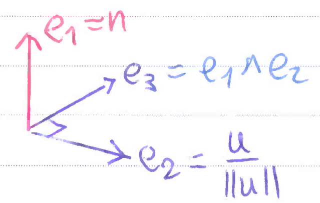
$$Mu = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 2\sqrt{6}+4 \\ 2\sqrt{6}-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\frac{\sqrt{6}}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

**Propr.**

Soit $E$ euclidien orienté de dim. 3
$r$ la rotation d'axe $(\Delta, n)$, $n$ unitaire
d'angle $\theta$.
Si $u \perp \Delta$, alors
$$u \wedge r(u) = \|u\|^2 \sin\theta \; n.$$

**Démo**




* Si $u = 0_E$, alors $u \wedge r(u) = 0_E = \underbrace{\|u\|^2}_{=0} \sin\theta \; n$.

* Supposons $u \neq 0_E$ ; posons $e_1 = n$ (unitaire)
$e_2 = \frac{u}{\|u\|}$ (aussi) et $e_3 = e_1 \wedge e_2$.

Alors la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est OND adaptée à $r$.

Ainsi $R = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Dans cette base, $u$ a pour matrice $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \|u\| \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $r(u)$ a pour matrice $RX = \begin{pmatrix} 0 \\ \|u\|\cos\theta \\ \|u\|\sin\theta \end{pmatrix}$.

Le vecteur $u \wedge r(u)$ a donc pour matrice dans cette base (OND !)

$$X \wedge RX = \begin{pmatrix} 0 \\ \|u\| \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \|u\|\cos\theta \\ \|u\|\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|u\|^2\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que

$$u \wedge r(u) = \|u\|^2 \sin\theta \, e_1 = \|u\|^2 \sin\theta \, n. \quad \boxtimes$$

§VI.3 CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES

Démo

Analyse. Soit $f \in O(E)$ quelconque, où $E$ est un espace euclidien orienté de dimension 3.

- Comme $f \in O(E)$, $\boxed{sp(f) \subset \{\pm 1\}}$.
- $\chi_f$ est un polynôme unitaire de degré 3, donc $\lim_{x \to -\infty} \chi_f(x) = -\infty$
  $\lim_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\chi_f$ a au moins une racine réelle, donc $\boxed{sp(f) \neq \emptyset}$.

Hypothèse 1 : $1 \in sp(f)$.

Le sous-espace propre associé, $E_1(f)$, peut être de dimension 1, 2 ou 3.

* si $\dim E_1(f) = 3$ :
alors $f = Id_E$. $\boxed{\text{Identité}}$

* si $\dim E_1(f) = 2$ :
On pose $\Pi = E_1(f)$ et $\Delta = E_1(f)^\perp$.
$\Delta$ est une droite qui est stable par $f$ (car $\Pi$ l'est et $f \in O(E)$) et l'endomorphisme induit $f_\Delta$ reste orthogonal. C'est obligatoirement $f_\Delta = \pm Id_\Delta$, mais $+Id_\Delta$ est exclu car sinon on aurait $f = Id_E$ et $\dim E_1(f) = 3$.

donc : $E = \Pi \overset{\perp}{\oplus} \Delta$ stables

$f_\Pi = Id_\Pi$ et $f_\Delta = -Id_\Delta$ ;

dans une BOND adaptée, on a :

$$\text{mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$ : on reconnait

la $\boxed{\text{réflexion}}$ par rapport à $\Pi = E_1(f)$.

* si $\dim E_1(f) = 1$

On pose $\Delta = E_1(f)$ et $\Pi = \Delta^\perp$.

De $\hat{m}$, $f$ induit sur $\Pi$ une isométrie ! Mais $\Pi$ est un plan : c'est soit une rotation (plane), soit une symétrie axiale. Le deuxième cas est exclu car $\Pi$ ne contient pas de $\vec{vp}$ de $f$ pour la vp 1.

Dans une BOND adaptée à $\Delta \overset{\perp}{\oplus} \Pi$, la matrice de $f$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ : on reconnait la $\boxed{\text{rotation}}$ d'axe $\Delta$ et

angle $\theta$.

Remarquons que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ car sinon $f = Id_E$ et $\dim E_1(f) = 3 \neq 1$ ; le cas $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ est possible : la matrice est alors $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$,

symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\Delta$ : $\boxed{\text{retournement d'axe } \Delta}$.

Hypothèse 2 : $1 \notin sp(f)$ ; alors obligatoirement $-1 \in sp(f)$

Même chose : $\dim(E_{-1}(f)) \in [\![1, 3]\!]$.

* si $\dim E_{-1}(f) = 3$

alors $f = -Id_E$ $\boxed{\text{symétrie centrale par rapport à } O.}$

* si $\dim E_{-1}(f) = 2$

$\Pi = E_{-1}(f)$ est stable par $f$,

donc $\Delta = \Pi^\perp$ aussi

Comme $f_\Delta$ est orthogonal et $\Delta$ est une droite, $f_\Delta = \pm Id_\Delta$.

mais : si $f_\Delta = +\mathrm{Id}_\Delta$, $1 \in sp(f)$
si $f_\Delta = -\mathrm{Id}_\Delta$, $\Delta$ contient un vp de $f$ pour la vp $-1$

contradictions.

→ situation impossible.

* si $\dim E_1(f) = 1$

Comme pour la rotation :
On pose $\Delta = E_{-1}(f)$
$\Pi = \Delta^\perp$.

$f_\Pi$ est une isométrie d'un plan, mais $\Pi$ ne contient pas de vp de $f$ (ils sont tous dans $E_{-1}(f)$).
Donc $f_\Pi$ est une "vraie" rotation (pour $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$).

cas $\theta \equiv 0\ [2\pi]$
→ réflexions
cas $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$
→ symétrie centrale

Dans une base adaptée à $\Delta \overset{\perp}{\oplus} \Pi$, la matrice de $f$ s'écrira :

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{de réflexion} \\ \text{par rapport à } \Pi}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice de} \\ \text{rotation} \\ \text{d'axe } \Delta = \Pi^\perp}}$$

Ces deux dernières matrices commutent :
$f$ est la <u>composée d'une réflexion et d'une rotation qui commutent</u>.
On parle de $\boxed{\text{roto-réflexion}}$.
L'axe de la rotation est orthogonal au plan de la réflexion.

$\boxed{\text{SYNTHÈSE}}$ On vérifie que dans les 6 cas où on a trouvé quelque chose, il s'agit bien d'isométries.
On constate que les matrices réduites (en BOND) sont toutes orthogonales et on les range par déterminant :

| | $SO(E)$ $\det(f) = +1$ | $O(E) \setminus SO(E)$ $\det(f) = -1$ |
|---|---|---|
| $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ | Identité | Symétrie centrale |
| $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ | Retournements | Réflexions |
| $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ | "Vraies" rotations | "Vraies" roto-réflexions |