C9-2T Identification des isométries en dimension 3.

Ex 8 **Q1** Soit $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

- Les colonnes de A forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$.
  En effet : $\|C_1\|^2 = \frac{1}{49}(4+36+9) = 1$
  $\|C_2\|^2 = \frac{1}{49}(36+9+4) = 1$
  $\|C_3\|^2 = \frac{1}{49}(9+4+36) = 1$
  $\langle C_1, C_2\rangle = \frac{1}{49}(-12+18-6) = 0$
  $\langle C_1, C_3\rangle = \frac{1}{49}(6+12-18) = 0$
  $\langle C_2, C_3\rangle = \frac{1}{49}(-18+6+12) = 0$.
  Donc $\boxed{f \in O(\mathbb{R}^3)}$ (f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$)

- Comme $A \neq \pm I_3$ et que A est symétrique, f est soit une réflexion, soit un retournement.
  Mais $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \frac{1}{7}(-2+3+6) = 1$
  donc $\boxed{f \text{ est une réflexion}}$ par rapport à un plan Π.

- On sait que $\Pi = E_1(f)$
  Or $(x,y,z) \in E_1(f) \iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

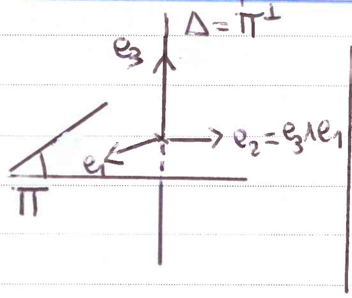
$$\iff \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -9x + 6y - 3z = 0 \\ 6x - 4y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

équations toutes proportionnelles : normal car $\dim E_1(f) = 2$, donc $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$.

$$\iff 3x - 2y + z = 0.$$

$\boxed{\Pi \text{ est le plan d'équation } 3x - 2y + z = 0}$

- 

  Construisons une bond. adaptée à f.
  $e_3 = (3, -2, 1)$ est normal à Π.
  $e_1 = (0, 1, 2)$ est orthogonal à e_3 donc dans Π

On complète en une b.o.d. en prenant
$e_2 = e_3 \wedge e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

les vecteurs ne sont pas unitaires pour l'instant

On normalise les vecteurs : $e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
et (e_1', e_2', e_3') est une b.o.n.d. adaptée à la réflexion f.

Ainsi $\boxed{A = P D P^T \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}$

$$\boxed{P = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3\sqrt{5} \\ \sqrt{14} & -6 & -2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{14} & 3 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \end{array} \in SO(3)}$$

Q2 Soit $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée.

- Les colonnes de B sont ON donc $\boxed{g \in O(\mathbb{R}^3)}$
- B n'est pas symétique donc g est une rotation ou une roto-réflexion.

Mais $C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ * \\ * \end{pmatrix} = +C_3$

- inutile de calculer les trois composantes

donc g transforme la base canonique en une base directe, donc $\boxed{g \in SO(\mathbb{R}^3)}$, càd $\boxed{\text{g est une rotation}}$

- Cherchons son axe $\Delta = E_1(g)$.

On a $B - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, où l'on constate que $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Delta}$.

- et comme $\dim(\Delta) = 1$, (e_1) est une base de Δ, $\Delta = \mathrm{Vect}(e_1)$.

À partir d'ici, Δ et $\Delta^\perp$ sont orientés par e_1.

- nécessaire pour que le signe de l'angle θ ait un sens.

- Cherchons θ l'angle de la rotation.

Tout d'abord, $\mathrm{tr}(g) = 1 + 2\cos\theta$

donc $2 = 1 + 2\cos\theta$

d'où $\cos\theta = \frac{1}{2}$

et $\boxed{\theta \equiv \pm \pi/3 \; [2\pi]}$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Prenons $\boxed{e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta^\perp}$

- e_2 sert pour le signe de θ, et la base adaptée.

On sait que $e_2 \wedge g(e_2) = \|e_2\|^2 \sin\theta \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$

Mais $g(e_2) = B e_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $e_2 \wedge g(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_1$.

- seul le signe compte !

On en déduit que $\sin\theta < 0$ et on prendra $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{3}}$

- plus précisément, $\sin\theta = -1 \times \dfrac{\|e_1\|}{\|e_2\|^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; cohérent avec $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

- (e_1, e_2) constituent le début d'une base adaptée à la rotation g. On complète avec

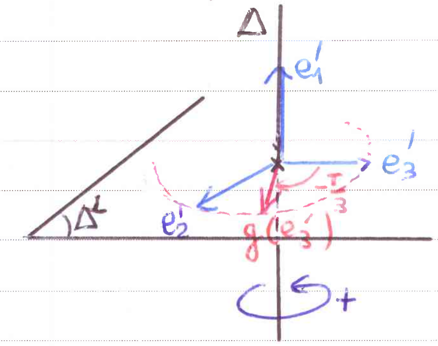
$\boxed{e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

Reste à normaliser les trois vecteurs : pour obtenir une b.o.n.d. (e_1', e_2', e_3') adaptée :

on obtient $B = P\,R\,P^T$

où $R = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$ et $P = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{array}$

(et on a $B, P \in SO(3)$)



Q3 Soit $C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée.

- Les colonnes de C sont ON donc $h \in O(\mathbb{R}^3)$.
- C n'est pas symétrique donc h est une rotation ou une roto-réflexion. Ses colonnes vérifient $C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 36 \\ * \\ * \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ * \\ * \end{pmatrix} = -C_3$

donc h est indirecte : c'est une $\boxed{\text{roto-réflexion}}$.

- Cherchons son axe $\Delta = E_{-1}(h)$.

Comme $C + I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 13 & -7 \\ -1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $5C_1 - C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

plutôt que de perdre son temps en devinettes, (un peu de) pivot sur les lignes.

c'est quand même plus facile après ça !

on obtient $\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Delta}$

À compter d'ici, on oriente Δ et $\Delta^\perp$ par e_1.

- Pour son angle θ, on sait que

$$\mathrm{tr}(h) = -1 + 2\cos(\theta)$$

$R = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(C) + 1) = \frac{1}{2}$

puis $\boxed{\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$

Prenons $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Delta^\perp$, de sorte que :

$$e_2 \wedge h(e_2) = \|e_2\|^2 \sin(\theta) \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

♡

Mais

$$h(e_2) = Ce_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \wedge h(e_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ * \\ * \end{pmatrix} = +\frac{1}{3} e_1$$

seul ± nous intéresse !

On en tire que $\sin(\theta) > 0$ et que l'on peut prendre $\boxed{\theta = +\frac{\pi}{3}}$.

h est la roto-réflexion d'axe Δ dirigé et orienté par $e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'angle $\theta = +\frac{\pi}{3}$.

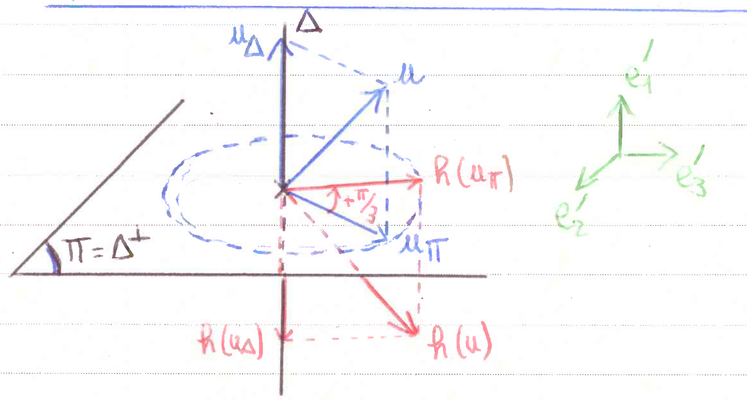
En posant $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et

en normalisant (e_1, e_2, e_3), on obtient une b.o.n.d (e_1', e_2', e_3') qui permet de réduire C :

$$C = PRP^T \quad \text{où} \quad R = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$C \in O(3) \setminus SO(3)$
$P \in SO(3)$

$$P = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{27} & 0 & -2/\sqrt{54} \\ -1/\sqrt{27} & 1/\sqrt{2} & -5/\sqrt{54} \\ 1/\sqrt{27} & 1/\sqrt{2} & 5/\sqrt{54} \end{pmatrix}$$



On tourne autour de Δ, puis on bascule de l'autre côté du miroir Π... ou l'inverse ; cela revient au même car la rotation et la réflexion commutent.

Q4 Soit $D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.

- Les colonnes de D sont ON, donc $\boxed{\varphi \in O(\mathbb{R}^3)}$
- Comme $D \neq \pm I_3$ et que D est symétrique, alors φ est une réflexion ou un retournement.
  Comme $\mathrm{tr}(D) = \frac{1}{3}(-2+1+-2) = -1$,
  il s'agit d'un $\boxed{\text{retournement}}$
- On sait que son axe Δ vérifie $\Delta = E_1(\varphi)$ et que $\Delta^\perp = E_{-1}(\varphi)$
  Cherchons une équation de $\Pi = \Delta^\perp$:

$$D + I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Une équation de Π est donc $x + 2y - z = 0$ et le vecteur $\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$ est normal à Π, donc sur Δ.

$\boxed{\varphi \text{ est le retournement d'axe } \Delta = \mathrm{Vect}(e_1)}$

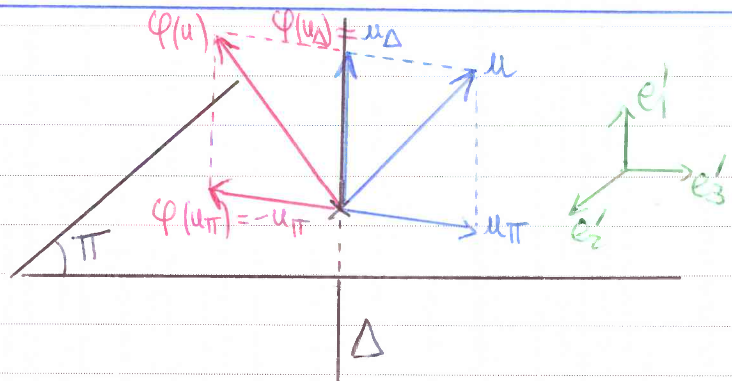
- Pour en construire une base adaptée, on prend

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Delta^\perp$$

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

puis on normalise (e_1, e_2, e_3) pour obtenir une bond adaptée.

Ainsi : $$\boxed{D = P D' P^T \quad \text{où} \quad D' = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \in SO(3)}$$



Il s'agit d'un retournement (demi-tour) autour de l'axe Δ.