Soit $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A, $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et orienté canoniquement.
C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

- $\|C_1\|^2 = \frac{1}{49}(4+36+9) = 1$
  $\|C_2\|^2 = \frac{1}{49}(36+9+4) = 1$
  $\|C_3\|^2 = \frac{1}{49}(9+4+36) = 1$
  $\langle C_1, C_2\rangle = \frac{1}{49}(-12+18-6) = 0$
  $\langle C_1, C_3\rangle = \frac{1}{49}(6+12-18) = 0$
  $\langle C_2, C_3\rangle = \frac{1}{49}(-18+6+12) = 0$

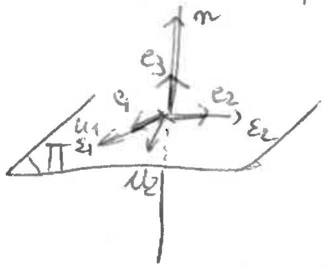
Les colonnes forment une famille orthonormée : $A \in O(3)$
La base canonique étant orthonormée : $f \in O(\mathbb{R}^3)$,
f est une isométrie

- $\det(f) = \frac{1}{7^3}\left(-2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)$
  $= \frac{1}{7^3}(-2\times 14 - 6\times 72 - 3\times 21)$
  < 0

donc $\det(f) = -1$:
f est une isométrie indirecte (une rotoréflexion).
Comme f est symétrique (A l'est), c'est une réflexion par rapport à un plan Π.
(on peut aussi noter θ l'angle de la rotoréflexion et utiliser que $-1+2\cos\theta = \mathrm{tr}\, f = \mathrm{tr}\, M = 1$
donc $\cos\theta = 1$, $\theta \equiv 0\ [2\pi]$
ou constater que $A^2 = I_3$)

- Déterminons Π : c'est $E_1(f)$.
  $A - I_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
  de rang 1 comme prévu, où $C_2 + 2C_3 = C_1 - 3C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  donc $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, famille libre de 2 vecteurs, forment une base de Π.
  d'où $\boxed{\Pi = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \text{ où } u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}$

- Construisons une BON adaptée à f :



Orthonormalisons (u_1, u_2) :
$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \|\varepsilon_1\|^2 = 5$
$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \|\varepsilon_2\|^2 = 70$

$\hat{u}_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{6}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}\right]$
$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

D'après la 3e ligne de $A - I_3$, Π a pour équation $-3x + 2y - z = 0$ donc pour vecteur normal $n = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conclusion

On pose donc : $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; on constate que $e_3 = +e_1 \wedge e_2$.
La base $\mathcal{B}'(e_1, e_2, e_3)$ est orthonormée (directe) et adaptée à f, au sens où
$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Matriciellement : on a établi que $A = PDP^{-1} = PDP^T$
où $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{70} & -3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{5} & 6/\sqrt{70} & 2/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{5} & -3/\sqrt{70} & -1/\sqrt{14} \end{pmatrix} \in SO(3)$.

Soit $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.

C_1, C_2, C_3 les colonnes de B.

- On vérifie (...) que les colonnes de B forment une famille orthonormée, donc $B \in O(3)$ et comme la base canonique est ON, g est une isométrie

- On peut calculer $\det(B)$ ou être plus astucieux :

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ * \\ * \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

puisque $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Nécessairement $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ car (C_1, C_2, C_3) est orthonormée

g transforme la base canonique en une base directe, donc g est une rotation.

- Notons (Δ, e_1) l'axe orienté de la rotation et θ son angle

$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ On aura $1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr}(B) = \frac{6}{3} = 2$

donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$, donc $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

- Cherchons l'axe Δ : (c'est $E_1(f)$).

$B - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (qui est de rang 2 comme prévu)

Comme $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Delta$.

$\boxed{\Delta = \operatorname{Vect}(u_1) \text{ où } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et on oriente } \Delta \text{ par } e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

- Pour trouver le signe de θ, On choisit v orthogonal à Δ : par exemple $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors $g(v) = Bv = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

puis $v \wedge g(v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}}}_{<0} e_1$

donc on prendra, puisque $v \wedge g(v) = \|v\|^2 \underbrace{\sin\theta}_{<0}\, e_1$,

$\boxed{\theta = -\frac{\pi}{3}}$

g est la rotation d'axe Δ dirigé et orienté par $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'angle $-\frac{\pi}{3}$

- Construisons une base adaptée à g :

Prenons $e_2 = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $e_2 \perp e_1$,

puis $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Conclusion

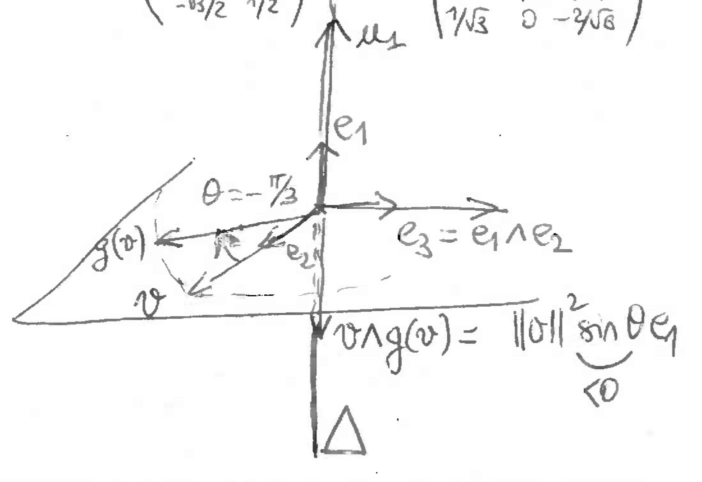
Dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$, où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Et matriciellement,

$$B = PRP^{-1} = PRP^T$$

où $R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \in SO_3$



Soit $C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.

- On vérifie que les colonnes de C forment une bon, donc $C \in O(3)$, et comme la base canonique est on, h est une isométrie.

- Remarquons que $\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -36$

donc $C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} * \\ * \\ -36 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} * \\ * \\ -4 \end{pmatrix}$

Comme de toute façon $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$, c'est que $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ et que (C_1, C_2, C_3) est indirecte.

Donc h est une isométrie indirecte ; comme C n'est pas symétrique, c'est une rotoréflexion.

- Notons (Δ, e_1) l'axe orienté de la rotation, θ son angle.

$\left\{ \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}(h) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$ On a $\mathrm{tr}(h) = -1 + 2\cos\theta$

donc $-1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(C) = 0$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\boxed{\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$

- Recherche de Δ : c'est $E_{-1}(f)$:

$C + I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 13 & -7 \\ -1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ici $-5C_1 + C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $u = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est sur l'axe Δ.

Orientons-le par $\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{27}}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

- Signe de θ.

Prenons $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp e_1$

$Cv = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ { v subit la rotation seule, il est insensible à la réflexion }

$v \wedge Cv = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ * \\ * \end{pmatrix}$

Comme $v \wedge Cv = \|v\|^2 \sin\theta\, e_1$ et que $e_1 = \frac{1}{\sqrt{27}}\begin{pmatrix} 5 \\ * \\ * \end{pmatrix}$, $\sin\theta > 0$

donc on prendra $\boxed{\theta = +\frac{\pi}{3}}$

- Base adaptée :

On prend $\boxed{e_2 = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

et $e_3 = e_1 \wedge e_2$

$= \frac{1}{\sqrt{54}}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{e_3 = \frac{1}{\sqrt{54}}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}}$

Conclusion :

Dans la BOND $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$, h a pour matrice.

$R = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Matriciellement, C est orthogonalement semblable à R :

$C = PRP^{-1} = PRP^{T}$

où $P = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{27} & 0 & -2/\sqrt{54} \\ -1/\sqrt{27} & 1/\sqrt{2} & -5/\sqrt{54} \\ 1/\sqrt{27} & 1/\sqrt{2} & 5/\sqrt{54} \end{pmatrix} \in SO(3)$.

(même illustration que pour la rotation)

Soit $D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée.

• On remarque que

$D \in O(3)$ (colonnes o.n.)

$D \in S_3(\mathbb{R})$

donc f est une <u>symétrie orthogonale</u> car la base canonique est O.N.

De plus $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$

donc $C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} * \\ * \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} * \\ * \\ -2 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} C_3$

(C_1, C_2, C_3) est directe, donc

$D \in SO(3)$ et f est une <u>rotation</u>

f est donc un <u>retournement</u> d'axe Δ.

• Cherchons Δ : c'est $E_1(f)$

$D - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $C_3 - 2C_2 - C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Delta$

$\boxed{f \text{ est le retournement d'axe } \Delta = \mathrm{Vect}(e_1), \text{ où } e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

• Base adaptée :

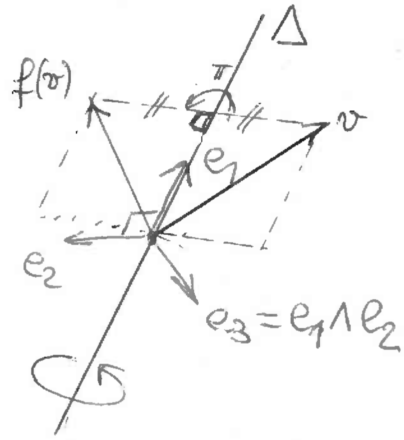
On prend $\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$ $\boxed{e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \perp e_1$

et $\boxed{e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

alors $\underset{(e_1,e_2,e_3)}{\mathrm{mat}}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}_{\Delta}$

et $D = P \Delta P^{-1} = P \Delta P^T$

où $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \in SO(3)$.



Δ est à la fois :

— la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ

— la rotation d'axe orienté (Δ, e_1) et d'angle $\theta = \pi$.