

1 ▷ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynômiale en  $|x|$ , telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |P(x)| \quad \text{avec} \quad P(x) = \sum_{k=0}^d a_k |x|^k$$

Notons  $C = \sum_{k=0}^d |a_k|$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| \leq 1$ , par l'inégalité triangulaire :

$$|P(x)| = \left| \sum_{k=0}^d a_k |x|^k \right| \leq \sum_{k=0}^d |a_k| |x|^k \leq \sum_{k=0}^d |a_k| = C \leq C(1 + |x|^d)$$

et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , tel que  $|x| > 1$ , si  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $|x|^k \leq |x|^d$  ; donc par l'inégalité triangulaire :

$$|P(x)| = \left| \sum_{k=0}^d a_k |x|^k \right| \leq \sum_{k=0}^d |a_k| |x|^k \leq \sum_{k=0}^d |a_k| |x|^d = C |x|^d \leq C(1 + |x|^d)$$

Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(x)| \leq |P(x)| \leq C(1 + |x|^d)$$

Donc  $f$  est à croissance lente.

*Autre rédaction possible :* on a  $P(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\sim} a_d |x|^d$  donc  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|P(x)|}{1 + |x|^d} = |a_d|$  : la fonction continue  $x \mapsto \frac{|P(x)|}{1 + |x|^d}$  possède une limite finie en  $\pm\infty$  donc elle bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Cette dernière propriété n'étant pas explicitement dans le programme officiel, il faudrait rédiger un peu plus précisément :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|P(x)|}{1 + |x|^d} = |a_d| \text{ donc il existe } A \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que pour tout } |x| \geq A, \frac{|P(x)|}{1 + |x|^d} \leq |a_d| + 1.$$

Et  $x \mapsto \frac{P(x)}{1 + |x|^d}$  est continue sur le segment  $[-A, A]$ , donc elle est bornée sur  $[-A, A]$  : il existe

$$K \geq 0 \text{ tel que pour tout } |x| \leq A, \frac{|P(x)|}{1 + |x|^d} \leq K.$$

On a alors en posant  $C = \max(|a_d| + 1, K)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|P(x)| \leq C(1 + |x|^d)$ .

2 ▷ Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ .

La fonction  $\varphi$  étant continue, on a  $f\varphi \in C^0(\mathbb{R})$  par produit de fonctions continues.

Soit  $C \in \mathbb{R}_+$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq C(1 + |x|^k)$ .

Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(x)\varphi(x)| \leq C(1 + |x|^k)\varphi(x)$$

On a par croissance comparée  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2/2} = 0$  et  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{k+2} e^{-x^2/2} = 0$  ; par conséquent,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} Cx^2(1 + |x|^k)\varphi(x) = 0 \quad \text{donc} \quad C(1 + |x|^k)\varphi(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{d'où} \quad f(x)\varphi(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Or la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est intégrable en  $+\infty$  et en  $-\infty$  (intégrale de Riemann) donc  $f\varphi$  est intégrable en  $+\infty$  et en  $-\infty$  d'où  $f\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  c'est à dire :

$$f \in L^1(\varphi)$$

- 3 ▷
- la fonction nulle appartient clairement à  $CL(\mathbb{R})$ .
  - Soit  $f, g$  deux fonctions appartenant à  $CL(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

distinguer les cas  $|x| \leq 1$  et  $|x| > 1$  est assez classique

autre rédaction en étudiant les limites en  $\pm\infty$  à l'aide de l'équivalent  $P(x) \sim a_d |x|^d$

comparaison classique  $f(x)\varphi(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

les résultats des questions 1 et 2 vont être très utiles dans les questions qui suivent pour justifier l'intégrabilité de certaines fonctions

Soit  $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$  et  $k_f, k_g \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq C_f (1 + |x|^{k_f}) \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq C_g (1 + |x|^{k_g})$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\alpha f(x) + g(x)| \leq |\alpha f(x)| + |g(x)| \leq |\alpha| C_f (1 + |x|^{k_f}) + C_g (1 + |x|^{k_g})$$

Donc  $\alpha f + g$  est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en  $|x|$  donc d'après la question 1,  $\alpha f + g \in CL(\mathbb{R})$ .

$CL(\mathbb{R})$  est donc stable par combinaison linéaire, et contient la fonction nulle ;  $CL(\mathbb{R})$  est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

la stabilité par combinaison linéaire s'obtenait assez facilement en utilisant la question 1

- *Stabilité de  $CL(\mathbb{R})$  pour le produit.* Soit  $f, g \in CL(\mathbb{R})$ . On garde les notations précédentes,  $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$  et  $k_f, k_g \in \mathbb{N}$ .

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)g(x)| \leq C_f C_g (1 + |x|^{k_f}) (1 + |x|^{k_g})$$

Donc  $fg$  est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en  $|x|$  d'où d'après la question 1,  $fg \in CL(\mathbb{R})$ .

l'utilisation de la question 1 était encore utile ici

- 4 ▷ Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Notons  $g_x : y \mapsto f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y})$ . Montrons que  $g_x \in L^1(\varphi)$ .

On a  $g_x \in C^0(\mathbb{R})$  par composée de fonctions continues,  $f$  étant continue.

De plus,  $f$  appartenant  $CL(\mathbb{R})$ , il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g_x(y)| \leq C \left( 1 + \left| e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right|^k \right) \leq C \left( 1 + \left( e^{-t}|x| + \sqrt{1 - e^{-2t}}|y| \right)^k \right)$$

Donc  $g_x$  est majorée par une fonction polynômiale en  $|y|$  donc  $g_x$  est à croissance lente d'après la question 1.

Donc  $g_x \in C^0 \cap CL(\mathbb{R})$  donc  $g_x \in L^1(\varphi)$  d'après la question 2.

Par conséquent, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y}) \varphi(y) dy$  est convergente, ce qui montre que  $P_t(f)(x)$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- *Linéarité de  $P_t$ .* Soit  $f, g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} P_t(\alpha f + g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f + g) \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} g \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \\ &= \alpha P_t(f) + P_t(g) \end{aligned}$$

- 5 ▷ Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $C \geq 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq C (1 + |x|^k)$ .

On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- soit  $y \in \mathbb{R}$ . Par continuité de  $f$  en  $y$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y}) = f(y)$  donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y}) \varphi(y) = f(y) \varphi(y)$$

- pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \varphi(y)| &\leq C \left(1 + |e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y|^k\right) \varphi(y) \\ &\leq C \left(1 + (e^{-t}|x| + \sqrt{1 - e^{-2t}}|y|)^k\right) \varphi(y) \\ &\leq C \left(1 + (|x| + |y|)^k\right) \varphi(y) \end{aligned}$$

Et la fonction  $y \mapsto C \left(1 + (|x| + |y|)^k\right) \varphi(y)$  est intégrable car  $P : y \mapsto C \left(1 + (|x| + |y|)^k\right)$  est polynômiale en  $|y|$  donc à croissance lente d'après **1** et continue donc  $P \in L^1(\varphi)$  d'après **2**.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t(f)(x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

**6** ▷ Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ . Montrons que  $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R})$  par le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \varphi(y)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  par continuité de  $f$ .
- *Hypothèse de domination locale* : pour tout  $a > 0$ , pour tout  $x \in [-a, a]$ , et pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \varphi(y)| &\leq C \left(1 + (e^{-t}|x| + \sqrt{1 - e^{-2t}}|y|)^k\right) \varphi(y) \\ &\leq C \left(1 + (a + |y|)^k\right) \varphi(y) \end{aligned}$$

Et la fonction (indépendante de  $x$ ),  $y \mapsto C \left(1 + (a + |y|)^k\right) \varphi(y)$  est intégrable car  $P : y \mapsto C \left(1 + (a + |y|)^k\right)$  est polynômiale en  $|y|$  et continue donc  $P \in L^1(\varphi)$  d'après **1** et **2** (même argument qu'à la question précédente).

Donc l'application  $P_t(f) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \varphi(y) dy$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |P_t(f)(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)| \varphi(y) dy \quad (\text{ineg. triangulaire}) \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} C \left(1 + (|x| + |y|)^k\right) \varphi(y) dy \quad \text{car } f \in CL(\mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} e^{-t} \leq 1 \\ \sqrt{1 - e^{-2t}} \leq 1 \end{cases} \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |y|^{k-j} |x|^j\right) \varphi(y) dy \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy + C \sum_{j=0}^k \left[ \binom{k}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{k-j} \varphi(y) dy \right] |x|^j \quad \text{linéarité} \\ &\leq C \left(1 + \sum_{j=0}^k a_j |x|^j\right) \quad \text{avec } a_j = \binom{k}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{k-j} \varphi(y) dy \end{aligned}$$

Donc  $P_t(f)$  est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en  $|x|$ , indépendante de  $t$ .

Donc d'après la question 1,  $P_t(f) \in CL(\mathbb{R})$ .

De plus,  $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R})$  d'après la première partie de la question, donc  $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  donc d'après la question 2,  $P_t(f) \in L^1(\varphi)$ .

**7** ▷ Commençons par justifier la convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x) dx$ .

application du théorème de convergence dominée, il faut majorer indépendamment de  $t$  en utilisant :  $e^{-t} \leq 1$  et  $\sqrt{1 - e^{-2t}} \leq 1$

théorème de continuité des intégrales à paramètres, il faut majorer ici indépendamment de  $x$

$f'$  et  $g'$  sont continues et à croissance lente donc d'après la question 3,  $f'g'$  est à croissance lente (et continue par produit de fonctions continues) :  $f'g' \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  donc d'après la question 2,  $f'g' \in L^1(\varphi)$  d'où la convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x) dx$ .

On va effectuer une intégration par parties en remarquant que  $(f'\varphi)' = L(f)\varphi$ .

On a  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f'(x)\varphi(x)g(x) = 0$  par croissance comparée car  $f'g \in CL(\mathbb{R})$  par produit de fonctions à croissance lente.

Par conséquent, par le théorème d'intégration par parties, les intégrales  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f'\varphi)'g$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f'\varphi g'$  sont de même nature (convergente) et :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)g(x)\varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f'\varphi)'(x)g(x) dx \\ &= \underbrace{[f'(x)\varphi(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)g'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x) dx \end{aligned}$$

8 ▷ Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  telle que  $f' \in CL(\mathbb{R})$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Notons pour  $(t, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ,  $F(t, y) = f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\varphi(y)$ .

On a :

- pour tout  $t > 0$ ,  $y \mapsto f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\varphi(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (déjà vu à la question 4).
- pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto F(t, y)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et  $\exp \in C^1(\mathbb{R})$ , et  $t \mapsto \sqrt{1 - e^{-2t}}$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- *hypothèse de domination* : soit  $a > 0$ , pour tout  $(t, y) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}$  :  $f' \in CL(\mathbb{R})$  donc il existe  $C' \geq 0$  et  $k' \in \mathbb{N}$ , tels que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $f'(u) \leq C'(1 + |u|^{k'})$  d'où :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) \right| &= \left| -e^{-t}x + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}y \right| \cdot \left| f'(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \right| \varphi(y) \\ &\leq \left( e^{-t}|x| + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}|y| \right) C' \left( 1 + |e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y|^{k'} \right) \varphi(y) \quad \text{car } f' \in CL(\mathbb{R}) \\ &\leq C' \left( |x| + \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2a}}}|y| \right) \left( 1 + (|x| + |y|)^{k'} \right) \varphi(y) \quad (\text{inégalité triangulaire}) \end{aligned}$$

Et l'application  $y \mapsto C' \left( |x| + \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2a}}}|y| \right) \left( 1 + (|x| + |y|)^{k'} \right) \varphi(y)$  est indépendante de  $t$ , intégrable sur  $\mathbb{R}$ , car  $y \mapsto C' \left( |x| + \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2a}}}|y| \right) \left( 1 + (|x| + |y|)^{k'} \right)$  est une application polynômiale en  $|y|$  et continue donc appartient à  $L^1(\varphi)$  d'après 1 et 2.

Les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres sont vérifiées, donc  $t \mapsto P_t(f)(x)$  est de classe  $C^1$  sur tout intervalle  $[a, +\infty[ \subset ]0, +\infty[$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}y \right) f'(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\varphi(y) dy$$

9 ▷ On applique à nouveau le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (cas  $C^2$ ).

Ici,  $t \in \mathbb{R}_+$  est fixé.

On note pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $G(x, y) = f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\varphi(y)$ .

- pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto G(x, y)$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  par composée de fonctions  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  étant supposée de classe  $C^2$ .
- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les applications  $y \mapsto G(x, y)$  et  $y \mapsto \frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$ ; en effet :
  - $y \mapsto G(x, y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (cf question 4)

attention à bien justifier la convergence de l'une des deux intégrales, et étudier le crochet pour pouvoir effectuer l'intégration par parties

on applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre

théorème de dérivation des intégrales à paramètres (cas  $C^2$ )

— pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = e^{-t} f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y)$  et  $f' \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ , on en déduit comme à la question 4 (en remplaçant  $f$  par  $f'$ ) que  $y \mapsto f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

• hypothèse de domination. Pour tout  $x \in [-a, a]$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) \right| &= e^{-2t} \left| f'' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \right| \varphi(y) \\ &\leq e^{-2t} C''' \left( 1 + \left( e^{-t}|x| + \sqrt{1 - e^{-2t}|y|} \right)^{k''} \right) \varphi(y) \quad \text{car } f'' \in CL(\mathbb{R}) \\ &\leq C''' \left( 1 + (|x| + |y|)^{k''} \right) \varphi(y) \leq C''' \left( 1 + (a + |y|)^{k''} \right) \varphi(y) \end{aligned}$$

Et l'application  $y \mapsto C''' \left( 1 + (a + |y|)^{k''} \right) \varphi(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  pour les mêmes raisons que celles données pour l'intégrabilité du majorant trouvé à la question précédente.

Par conséquent,  $P_t(f) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) dy$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_t(f)'(x) &= e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \\ P_t(f)''(x) &= e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \end{cases}$$

technique de majoration identique aux questions précédentes

10 ▷ Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  telle que  $f'$  et  $f''$  soient à croissance lente.

Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

On a

$$\varphi'(y) = -y\varphi(y) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dy} \left( f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \right) = \sqrt{1 - e^{-2t}} f'' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right)$$

et

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) = 0 \quad \text{car } f' \in CL(\mathbb{R})$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \int_{-\infty}^{+\infty} y f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy &= e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \\ &= P_t(f)''(x) \end{aligned}$$

Donc d'après les questions 8 et 9, et linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} y \right) f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \\ &= -x P_t(f)'(x) + P_t(f)''(x) = L(P_t(f))(x) \end{aligned}$$

11 ▷ Notons pour tout  $t > 0$ ,  $h(t) = t \ln(t)$ .  $h$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $t > 0$ ,  $h'(t) = \ln(t) + 1$ .

On a  $h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(t) \geq -1 \Leftrightarrow t \geq e^{-1}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$  par croissance comparée.

D'où le tableau de variations :

$t$	0	$e^{-1}$	$+\infty$
$h(t)$	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

Donc  $h$  est prolongeable par continuité en 0, en posant  $h(0) = 0$ . On notera encore  $h$  la fonction ainsi prolongée sur  $[0, +\infty[$ .

12 ▷ Soit  $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  à valeurs strictement positives telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx = 1$ .

L'application  $x \mapsto h(g(x))\varphi(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  par continuité de  $g, h, \varphi$  et  $g(x) > 0$ .

D'après la question précédente, pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $|h(t)| \leq e^{-1}$  et  $h$  est croissante et positive sur  $[1, +\infty[$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{ll} \text{si } g(x) \geq 1 & |h(g(x))| = h(g(x)) \leq h(C(1 + |x|^k)) \\ \text{si } g(x) < 1 & |h(g(x))| \leq e^{-1} \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |h(g(x))| &\leq e^{-1} + h[C(1 + |x|^k)] \\ &\leq e^{-1} + C(1 + |x|^k)(\ln(C) + \ln(1 + |x|^k)) \quad \text{en supposant } C > 0 \\ &\leq e^{-1} + C(1 + |x|^k)(\ln(C) + |x|^k) \quad \text{car } \ln(1 + |x|^k) \leq |x|^k \end{aligned}$$

Donc la fonction continue  $h \circ g$  est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en  $|x|$ , elle appartient donc (question 1) à  $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  donc d'après la question 2,  $h \circ g \in L^1(\varphi)$  : par conséquent  $x \mapsto \ln(g(x))g(x)\varphi(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  donc  $\text{Ent}_\varphi(g)$  est bien définie.

13 ▷ Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

- D'après les questions 1 et 6,  $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ .
- $P_t(f)$  est à valeurs strictement positives, car définie par l'intégrale d'une fonction continue à valeurs strictement positives : pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y})\varphi(y) > 0$  car  $f$  à valeurs strictement positives.
- Et d'après le résultat admis après la question 6 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = 1$$

Donc  $P_t(f)$  vérifie les hypothèses de la question précédente, par conséquent  $S(t) = \text{Ent}_\varphi(P_t(f))$  est bien définie.

14 ▷ On suit l'indication. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . on note  $F(t, y) = f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y})\varphi(y)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $y \in \mathbb{R}$ . On a :

- pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto F(t, y)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  ;
- pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$|F(t, y)| = \left| f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y}) \right| \varphi(y) \leq C(1 + (|x| + |y|)^k) \varphi(y)$$

Et  $y \mapsto C(1 + (|x| + |y|)^k)\varphi(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (cf question 5).

Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre,  $t \mapsto P_t(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Montrons maintenant que  $S : t \mapsto \text{Ent}_\varphi(P_t(f))$  est continue.

Notons  $H(t, x) = \ln(P_t(f)(x))P_t(f)(x)\varphi(x) = h(P_t(f)(x))\varphi(x)$ .

- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto H(t, x)$  est continue par continuité de  $t \mapsto P_t(f)(x)$  (à valeurs strictement positives), continuité de  $h$  et de  $\varphi$ .
- *hypothèse de domination* : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en utilisant que  $P_t(f)$  est majorée par une fonction polynômiale en  $|x|$ , indépendante de  $t$  d'après la question 6, on peut alors majorer d'après la question 1,  $|P_t(f)(x)| \leq C(1 + |x|^k)$  et par la majoration déjà vue à la question 12 :

$$|h(P_t(f)(x))| \leq e^{-1} + h[C(1 + |x|^k)]$$

Et par conséquent,

$$|H(t, x)| = |h(P_t(f)(x))\varphi(x)| \leq (e^{-1} + h[C(1 + |x|^k)])\varphi(x)$$

inégalité  $\ln(1+u) \leq u$  pour tout  $u > -1$

toujours l'utilisation des questions 1 et 2 pour justifier l'intégrabilité

on applique la question précédente en vérifiant que  $P_t(f)$  vérifie bien toutes les hypothèses

cette hypothèse n'a pas servi à la question précédente mais l'entropie n'est définie dans l'énoncé que pour des fonctions vérifiant cette égalité

l'utilisation du résultat de la question 6 permettait de majorer simplement  $P_t(f)(x)$  indépendamment de  $t$

Et on a déjà justifié à la question 12 que l'application  $x \mapsto (e^{-1} + h[C(1 + |x|^k)]) \varphi(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

On en déduit par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre,  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

15 ▷ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P_0(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(y) dy = f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = f(x)$$

Par conséquent,

$$S(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(P_0(f)(x)) P_0(f)(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x)) f(x) \varphi(x) dx = \text{Ent}_\varphi(f)$$

Pour montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$ , on applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , d'après la question 5,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(y) dy = 1$  donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(P_t(f)(x)) P_t(f)(x) \varphi(x) = 0$$

- pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en utilisant la même majoration qu'à la question 14

$$|\ln(P_t(f)(x)) P_t(f)(x) \varphi(x)| \leq (e^{-1} + h[C(1 + |x|^k)]) \varphi(x)$$

Et  $x \mapsto (e^{-1} + h[C(1 + |x|^k)]) \varphi(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (cf question 12).

Donc d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(P_t(f)(x)) P_t(f)(x) \varphi(x) dx = 0$$

16 ▷ Conséquence immédiate de l'égalité de la question 10.

17 ▷ Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . On utilise la question précédente et la question 7 comme indiqué dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} -S'(t) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} L(P_t(f)(x)) [1 + \ln(P_t(f)(x))] \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)'(x) (1 + \ln \circ P_t(f))'(x) \varphi(x) dx \quad \text{d'après q7} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)'(x) \frac{P_t(f)'(x)}{P_t(f)(x)} \varphi(x) dx \\ &= e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f)'(x)^2}{P_t(f)(x)} \varphi(x) dx \quad \text{car } P_t(f)'(x) = e^{-t} P_t(f')(x) \text{ d'après q10} \end{aligned}$$

18 ▷ Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué dans l'espace euclidien  $C^1(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)\varphi(y)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} P_t(f')^2(x) &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \right)^2 \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right)} \varphi(y) \left[ \frac{f' \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \sqrt{\varphi(y)}}{\sqrt{f \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right)}} \right] dy \right)^2 \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2}{f} \left( e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}y} \right) \varphi(y) dy \right) \\ &\leq P_t(f)(x) P_t \left( \frac{f'^2}{f} \right) (x) \end{aligned}$$

Or  $P_t(f)(x) > 0$  d'où  $\frac{P_t(f')^2(x)}{P_t(f)(x)} \leq P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)$ ; donc par croissance de l'intégrale et la question précédente :

$$-S'(t) = e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)} \varphi(x) \, dx \leq e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x) \varphi(x) \, dx$$

**19**  $\triangleright$  D'après le résultat admis entre la question 6 et 7, appliqué à la fonction  $\frac{f'^2}{f} \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$  (hypothèse faite dans cette partie) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x) \varphi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x) \, dx$$

Donc d'après la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad -S'(t) \leq e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x) \, dx$$

**20**  $\triangleright$  On a d'après la question 15 et continuité de  $S$  en 0 :

$$\int_0^{+\infty} -S'(t) \, dt = S(0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \text{Ent}_\varphi(f)$$

Et  $\int_0^{+\infty} e^{-2t} \, dt = \frac{1}{2}$  donc d'après la question précédente et par croissance de l'intégrale en notant

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x) \, dx :$$

$$\int_0^{+\infty} -S'(t) \, dt \leq K \int_0^{+\infty} e^{-2t} \, dt \quad \text{i.e.} \quad \text{Ent}_\varphi(f) \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x) \, dx$$