Exercices

Exercice 1. Quels sont les vecteurs tangents à $X = [-1\,;1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ en $(0,0)$? en $(1,0)$? en $(1,1)$?

Exercice 2. Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = xy$ et $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S.

1. Déterminer le plan tangent à S en M_0.
2. Montrer que l'intersection de ce plan avec S est la réunion de deux droites affines.

Exercice 3. (CCINP 2023)
On définit la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Établir que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f possède un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
3. À l'aide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 4. Déterminer les extrema locaux de

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 3x^2 + y^2 + 2x^3 \end{array}$$

Exercice 5. Déterminer les extrema locaux de

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 + y^3 + z^4 \end{array}$$

Exercice 6. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 3y \end{array}$$

Montrer que f admet un maximum et un minimum et les déterminer.
Indication : on pourra étudier les variations de $g_y = f(.,y)$ pour $y \in [0\,;1]$ fixé.

Exercices CCINP

Exercice 7 (CCINP 41). Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x,y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u,v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
   (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
   $$(S) \ :\ \begin{cases} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{cases}$$
   (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
   En déduire les valeurs possibles de λ.
3. Déterminer les valeurs possibles de (u,v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

Exercice 8 (CCINP 56).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.