Septembre

Les étoiles, qui sont des boules de gaz, ont un rayon qui oscille dans le temps. On cherche une formule pour la fréquence des oscillations. La cohésion des étoiles est assurée par les forces de gravitation. On s'attend donc à devoir faire intervenir :
— R, le rayon de l'étoile ;
— ρ, la masse volumique ;
— $\mathcal{G}$, la constante intervenant dans la force de gravitation entre deux masses.

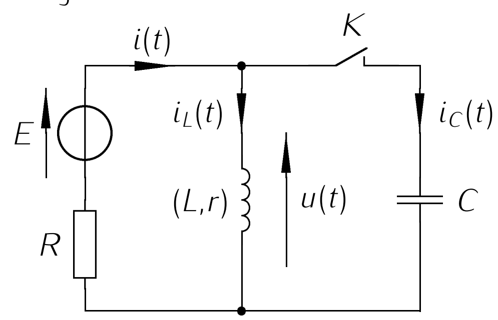
1. Donner l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, ρ et $\mathcal{G}$.
2. Sachant que la valeur de $\mathcal{G}$ est connue, quelles données peut-on obtenir à partir de la fréquence de vibration ?

Octobre

On donne deux lentilles L_1 et L_2, distantes de $3a$.
Pour L_1, $\overline{O_1F'_1} = 2a$ et pour L_2, $\overline{O_2F'_2} = -3a$ avec $a > 0$ (valeurs algébriques).
Un objet virtuel AB est placé sur l'axe optique de telle sorte qu'en valeurs algébriques, $\overline{O_1A} = \frac{1}{2}\overline{O_1O_2}$.
La lumière frappe d'abord L_1.
Déterminer l'image $A'B'$ de AB par construction graphique puis par le calcul de $\overline{F'_2A'}$.

Novembre

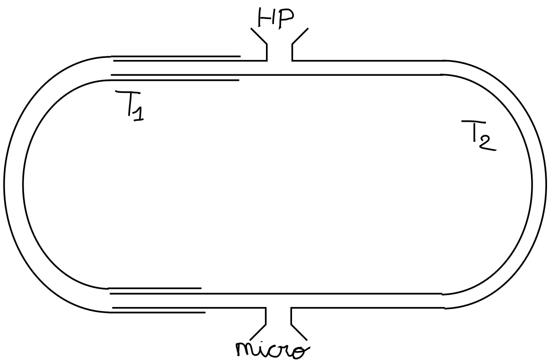
Une bobine réelle, d'inductance L et de résistance interne r, est alimentée par un générateur de f.é.m. E et de résistance interne R depuis un temps assez long.
On branche à ses bornes (en fermant l'interrupteur K) un condensateur parfait de capacité C à un instant que l'on prendra comme origine des temps. Le condensateur était initialement déchargé.



1. Rappeler le modèle équivalent de la bobine réelle d'inductance L et de résistance interne r.
2. Déterminer les valeurs des grandeurs $u(t)$, $i(t)$, $i_L(t)$ et $i_C(t)$, définies sur le schéma ci-contre, juste avant la fermeture de l'interrupteur, puis juste après la fermeture de l'interrupteur et enfin au bout d'un temps suffisamment long.
3. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $i_L(t)$; exprimer alors en fonction de r, R, L et C la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de ce circuit, puis calculer leur valeurs.
4. À partir des valeurs numériques trouvées, montrer qu'il s'établit dans le circuit un régime pseudo-périodique amorti de pulsation ω, que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q.
5. Déterminer alors littéralement l'expression la plus "légère" possible de $i_L(t)$, puis donner son expression numérique.
6. Tracer le graphe de $i_L(t)$ pour $0 \leq t \leq 80$ ms.

Application numérique : $L = 0{,}1$ H ; $C = 200$ μF ; $r = 10$ Ω ; $R = 50$ Ω ; $E = 120$ V.

Décembre



Le trombone de König est un dispositif de laboratoire permettant de faire interférer deux ondes sonores ayant suivi des chemins différents. Un haut-parleur, alimenté par un générateur basses fréquences, émet un son de fréquence $f = 1{,}5$ kHz. Un microphone branché sur un oscilloscope enregistre le signal sonore en sortie. En déplaçant la partie mobile du tuyau T_1, on fait varier l'amplitude du signal observé. Elle passe deux fois de suite par une valeur minimale lorsqu'on déplace T_1 de $d = 11{,}5 \pm 0{,}2$ cm. Déterminer la vitesse du son dans l'air à la température où l'expérience est réalisée.

Janvier

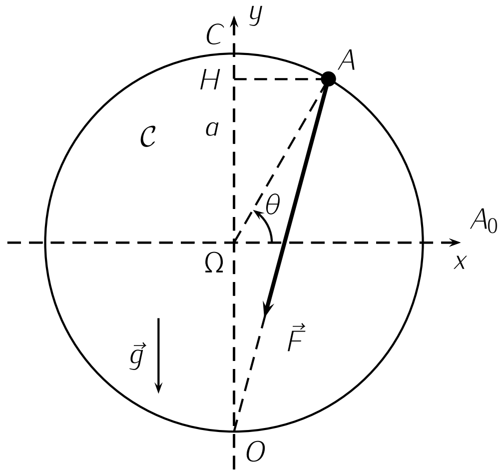
On a réalisé un filtre passe-bas à l'aide d'un condensateur de capacité C et d'une résistance $R = 1\text{k}\Omega$. La tension d'entrée a la valeur efficace $U_e = 6$V. On a mesurée la tension de sortie U_s en fonction de la fréquence f ; d'où le tableau suivant :

f (Hz)	200	500	1.10^3	2.10^3	5.10^3	1.10^4	2.10^4	5.10^4	1.10^5
U_s (V)	5,95	5,72	5,08	3,73	1,82	0,943	0,476	0,191	$95{,}5.10^{-3}$

1. Tracer le diagramme de Bode en gain de ce filtre.
2. Justifier qu'il s'agit bien d'un filtre passe-bas. Retrouver l'expression de sa fonction de transfert.
3. Déterminer la fréquence de coupure.
4. En déduire la capacité C du condensateur.
5. Peut-il se comporter comme un intégrateur ? Si oui, dans quel plage de fréquence ?

Début Février

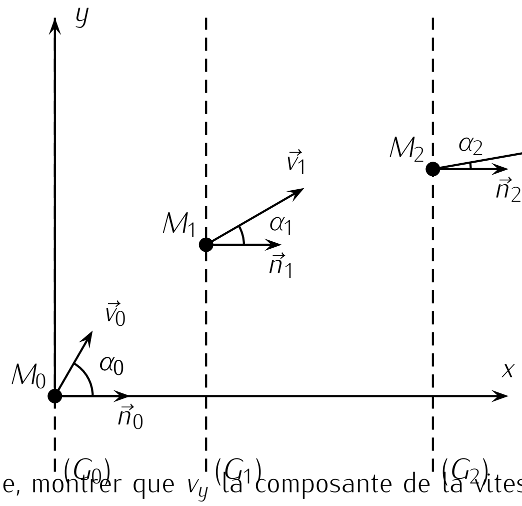
Un point A, de masse m, est mobile sans frottement sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon a contenu dans un plan vertical.
En plus de son poids, il est soumis de la part du point le plus bas O du cercle à une force de rappel $\vec{F} = -k.\overrightarrow{OA}$.
On suppose que A reste toujours en contact avec $\mathcal{C}$.



1. Exprimez l'énergie totale E_m de A en fonction de θ, $\dot{\theta}$, m, a, g et k.
2. Quelle doit être la vitesse v_0 de passage au point A_0 pour que le mobile atteigne le point C avec une vitesse nulle ?

Fin Février

(G_0), (G_1) et (G_2) sont trois grilles verticales portées aux potentiels respectifs U_0, U_1 et U_2 tels que $U_0 = 0$ V et $U_2 > U_1 > 0$ pour le moment.
Par analogie avec un condensateur plan, on admettra qu'il apparaît entre deux grilles, un champ électrostatique uniforme normal aux grilles.
À l'instant initial, un électron (de masse m et de charge $q = -e$) traverse (G_0) en M_0 avec une vitesse $\vec{v_0}$.
On note $\vec{n}_0$ le vecteur unitaire de la normale à (G_0) en M_0 et α_0 l'angle $(\vec{n}_0, \vec{v}_0)$.
Puis l'électron traverse successivement (G_1) en M_1 avec $\alpha_1 = (\vec{n}_1, \vec{v}_1)$ et (G_2) en M_2 avec $\alpha_2 = (\vec{n}_2, \vec{v}_2)$.



1. Par application du principe fondamental de la dynamique, montrer que v_y la composante de la vitesse de l'électron sur l'axe (M_0, y) se conserve au cours du temps.
2. Par application du théorème de l'énergie cinétique, déduire l'expression de α_1 en fonction de e, m, v_0, α_0 et U_1.
3. On suppose la vitesse v_0 négligeable par rapport à v_1. Quelle est la relation entre α_1, α_2, U_1 et U_2 ? Voyez-vous une analogie ?
4. Étudier le cas où $U_2 = U_1 \sin^2 \alpha_1$. Que se passe-t-il si $U_2 < U_1 \sin^2 \alpha_1$ (cette fois, $U_2 < U_1$). Commenter.

Début Mars

On donne $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ SI la constante de gravitation et $M_0 = 2.10^{30}$ kg la masse du Soleil.

1. Mouvement de la Terre.
   (a) Exprimer la vitesse v_0 de la Terre par rapport au repère galiléen associé au Soleil en fonction de $\mathcal{G}$, M_0 et $R_0 = 1{,}5.10^8$ km, le rayon de l'orbite terrestre, supposée circulaire, autour du Soleil.
   (b) Exprimer, en fonction de $\mathcal{G}$, M_0, R_0 et M_T la masse de la Terre, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle (nulle à l'infini), l'énergie totale dont on commentera le signe et le moment cinétique $\vec{L}_0$ de la Terre par rapport au Soleil ainsi que sa période de révolution autour de Soleil T_0.
2. Comète de HALLEY.
   Le périhélie de la comète de HALLEY se trouve à $0{,}6R_0$ du centre du Soleil ; sa période T est de 76 années terrestres.
   (a) Calculer le demi-grand axe de l'ellipse.

(b) Calculer la distance à l'aphélie.

Fin Mars

concours EPITA 2025

L'énergie solaire est une source d'énergie intermittente et non pilotable, dont les pics de production ne coïncident pas forcément avec les pics de demande. L'utiliser massivement pose donc un défi majeur en termes de stockage énergétique. Cette partie étudie un système original conçu par l'entreprise Gravitricity proposant de stocker l'énergie sous forme d'énergie potentielle de pesanteur. Il est pour le moment au stade de la recherche et développement, et seul un démonstrateur de petite taille a été construit, voir figure 1, installé dans le port d'Édimbourg (Écosse) en 2021. Le principe consiste à soulever un bloc de béton lors d'une phase de surproduction électrique, puis à faire chuter ce bloc en entraînant un alternateur lorsque la demande excède les capacités de production.

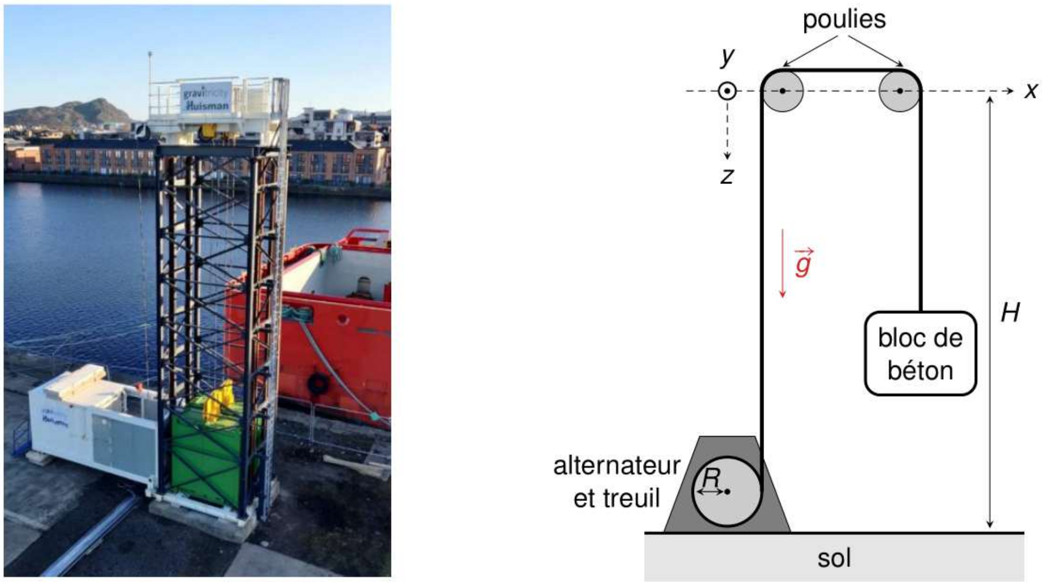


Figure 1 – Démonstrateur Gravitricity.

Q1 1. Définir ce qu'est une source d'énergie «intermittente et non pilotable». Citer un exemple de source d'énergie pilotable.

Q2 2. Citer un autre dispositif permettant le stockage d'énergie, et préciser sous quelle forme l'énergie y est stockée.

Le bloc de béton de masse $m = 50$ tonnes est accroché à l'extrémité d'un câble, dont l'autre extrémité est reliée au rotor d'un alternateur par l'intermédiaire d'un treuil de rayon $R = 50$ cm. Il peut se déplacer sur une hauteur $H = 7$ m. En période de stockage, un moteur permet de soulever le bloc. Dans une période de déstockage, le bloc est lâché, ce qui met en mouvement le rotor de l'alternateur et permet de produire de l'énergie électrique. L'ensemble des pièces en rotation sera simplement appelé «alternateur» par la suite, dont on note J le moment d'inertie équivalent par rapport à l'axe (Oy).

Le mouvement du bloc de béton lors du déstockage peut être décomposé en trois temps :

— Au moment du lâcher, l'alternateur n'est pas encore connecté au réseau électrique. Le bloc suit un mouvement de chute libre jusqu'à ce que l'alternateur atteigne une vitesse de rotation suffisante pour permettre le couplage avec le réseau.

— Une fois le couplage réalisé, la production électrique se traduit par un couple résistant $\Gamma_{\text{alt}} < 0$ subi par l'alternateur, dont la vitesse de rotation se stabilise à une valeur constante.

— Enfin, lorsque le bloc s'approche du sol, un couple de freinage supplémentaire est appliqué pour arrêter sa chute.

Tous les frottements sont négligés. Les poulies et le câble sont supposés idéaux, ce qui permet de considérer la tension T du câble uniforme et implique que la vitesse v de chute du bloc de béton est reliée à la vitesse de rotation Ω de l'alternateur par

$$v = R\Omega \tag{1}$$

Q3 3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au bloc de béton.

Q4 4. La deuxième équation régissant le fonctionnement du dispositif s'écrit

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = RT + \Gamma_{\text{alt}} \tag{2}$$

Comment s'appelle la loi physique utilisée pour l'établir ? Que représente le premier terme « RT » du membre de droite ? Justifier son expression et son signe.

Le bloc de béton est lâché à l'instant $t = 0$ depuis la position $z = 0$ avec une vitesse nulle. L'alternateur n'est alors pas relié au réseau, donc $\Gamma_{\text{alt}} = 0$.

Q5 5. Montrer que le mouvement de chute se fait à accélération constante

Q6

$$a_0 = \frac{g}{1 + \frac{J}{mR^2}} \tag{3}$$

Q7 6. En déduire les expressions de $v(t)$ et $z(t)$ en fonction de a_0.

Q8 7. Cette phase de démarrage se termine à l'instant t_0 où la vitesse de rotation Ω atteint une valeur seuil Ω_0 qui permet de coupler l'alternateur au réseau électrique. Exprimer $z(t_0)$ en fonction de a_0 et Ω_0 notamment.

On s'intéresse désormais à la deuxième phase du mouvement : l'alternateur est relié au réseau et tourne à vitesse constante Ω_0. Le dispositif produit une puissance électrique $P_\text{e} = 250$ kW. On suppose que toute la puissance mécanique prélevée est restituée au réseau électrique, si bien que

$$\Gamma_{\text{alt}} = \frac{P_\text{e}}{\Omega_0} \tag{4}$$

Q9 8. Exprimer la vitesse de chute v_0 au cours de cette phase en fonction de P_e, m et g.

Q10 9. On donne $a_0 = 1{,}5$ m · s^{-2}. Estimer numériquement v_0, t_0 et $z(t_0)$.

Q11 10. En supposant la phase de freinage de durée négligeable, estimer la durée pendant laquelle le démonstrateur fournit réellement de l'énergie avant d'être totalement déchargé. Commenter.

Le démonstrateur a obtenu des résultats probants, et permis à l'entreprise de lever des fonds pour un déploiement à plus grande échelle. Elle envisage notamment d'utiliser un puits d'accès à une mine désaffectée pour déplacer des blocs de masse totale $m' = 12000$ tonnes sur une profondeur H' de l'ordre de 750 m. La puissance maximale fournie par le dispositif serait alors de 4 MW.

Q12 11. Estimer l'énergie maximale que le dispositif est en mesure de stocker puis restituer.

Q13 12. Un foyer français consomme une énergie électrique de l'ordre de 12 kWh par jour, hors chauffage et production d'eau chaude sanitaire. Commenter le résultat de la question précédente.

Q14 13. Estimer le temps de fonctionnement du dispositif à puissance maximale avant qu'il ne soit complètement déchargé. Le résultat sera donné en heures.

Q15 14. Conclure : quel peut-être l'intérêt d'un tel dispositif dans l'optique d'une intégration de sources d'énergie intermittentes dans le mix électrique ?

AVRIL

Remarque : Bien qu'il soit conseillé de traiter le problème dans l'ordre, les dernières questions de la partie C peuvent en grande partie être traitées même si le reste du problème n'a pas été abordé en admettant l'expression de la force proposée par l'énoncé.

Dans ce problème, on étudie un moyen « gratuit » (en carburant) de propulsion spatiale : l'utilisation de la pression de radiation lors de la réflexion de la lumière sur un miroir. Il s'agit d'utiliser la force créée lors de la réflexion des photons sur un miroir afin de mettre en mouvement des objets.
On notera S la surface de la « voile solaire » considérée. Elle est supposée parfaitement réfléchissante, c'est-à-dire que la voile solaire est un miroir parfait.
Dans une première partie, on étudiera le cas où la voile est immobile dans un référentiel galiléen et où la lumière est en incidence normale. Dans la deuxième partie on étudiera le cas où l'angle d'incidence est non nul. Finalement dans la troisième partie, on tiendra compte du mouvement du miroir.
On notera λ la longueur d'onde de la lumière incidente et ν sa fréquence.
$h =$ représente la constante de Planck et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Données numériques :

grandeur	symbole	valeur
flux solaire au niveau de l'orbite terrestre	Φ	$1{,}3608\,\mathrm{kW/m^2}$
constante gravitationnelle	$\mathcal{G}$	$6{,}67384 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^2 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
masse du soleil	M_S	$1{,}9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
distance moyenne Terre-soleil	d_{TS}	1 u.a. $= 149{,}60 \times 10^9\,\mathrm{m}$
vitesse de la lumière dans le vide	c	$299\,792\,458$ m/s

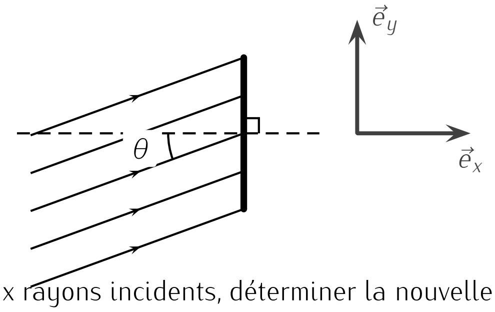
0.1 Cas de l'incidence normale

Dans cette partie, on considère que la lumière arrive sur le miroir en incidence normale, c'est-à-dire que la surface du miroir est orthogonale à la direction de propagation. Le miroir étant immobile dans le référentiel de l'étoile considéré comme galiléen, on ne considère pas de changement de longueur d'onde lors de la réflexion.
On notera $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire dirigée selon la lumière incidente.

1. Rappeler les relations de Planck-Einstein pour un photon (impulsion $\vec{p}$ et énergie E_0 d'un photon).
2. Le flux solaire Φ est la puissance surfacique provenant du soleil lorsque la surface considérée est orthogonale à la direction de propagation de la lumière. En déduire la puissance P arrivant sur le miroir, puis l'énergie correspondant pendant un court intervalle de temps dt.
3. Compte tenu des questions précédentes, déterminer le nombre de photons δN frappant le miroir entre t et $t + \mathrm{d}t$.
4. On considère le système fermé {les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t+\mathrm{d}t$}. Calculer la variation de quantité de mouvement du système entre t et $t + \mathrm{d}t$: $\overrightarrow{\mathcal{P}}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t)$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :
$$\overrightarrow{\mathcal{P}}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t) = -2\frac{\Phi S \mathrm{d}t}{c}\vec{e}_x$$
5. En déduire la force exercée par le miroir sur le système, puis celle exercée par les photons sur le miroir.
6. Exprimer alors la pression correspondante p_r, appelée pression de radiation, en fonction de Φ et de c.
7. Vérifier explicitement l'homogénéité du résultat obtenu à la question précédente.
8. Application numérique : au niveau de l'orbite terrestre, on considère une voile de surface $S = 100{,}0\,\mathrm{m^2}$. Calculer la force due à la pression de radiation. Comparer avec la force exercée par le soleil sur un objet de $20{,}00$ kg (toujours au niveau de l'orbite terrestre). Commenter [1].
9. Peut-on utiliser ce mode de propulsion pour se rapprocher du soleil ?

1. Remarque : le flux solaire décroit en $1/r^2$ à cause de la conservation de l'énergie, la force gravitationnelle est elle aussi en $1/r^2$, donc le rapport entre ces deux forces est en fait indépendant de la distance au soleil.

0.2 Cas de l'incidence oblique



On étudie maintenant le cas où la lumière incidente fait un angle θ avec la normale au miroir. Compte tenu de la distance au soleil et des angles mis en jeu, on considèrera que la lumière arrive sur le miroir sous la forme d'un faisceau de rayons parallèles.

1. Le flux solaire Φ étant défini par rapport à une surface normale aux rayons incidents, déterminer la nouvelle puissance arrivant sur la voile solaire $P(\theta)$ en fonction de θ, S et Φ (un schéma indiquant clairement les surfaces en jeu est vivement recommandé). En déduire l'énergie δE arrivant pendant un intervalle de temps dt.
2. Étudier la variation de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_0}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{p_0}(t)$ pour un seul photon lors du choc. On exprimera le résultat en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$. En déduire la variation de quantité de mouvement du système fermé {les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t + \mathrm{d}t$} : $\overrightarrow{\mathcal{P}}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t)$.
3. Montrer que la pression exercée dans ce cas sur le miroir est $p_r = 2\frac{\Phi}{c}\cos^2\theta$.

0.3 Prise en compte du mouvement de la voile

Intuitivement, on peut se douter que si la fréquence de la lumière ne varie pas lors de la réflexion, alors l'énergie mécanique totale du système { photons + miroir } pourrait augmenter sans raison. Dans cette question, on souhaite modéliser plus précisément la force lorsque le miroir est en mouvement. Toutefois, pour plus de simplicité et pour ne pas avoir à considérer des effets relativistes, le raisonnement sera mené sur un cas classique où les photons seront remplacés par des balles de tennis.

Le petit Philippe souhaite vous faire étudier un nouveau mode de propulsion pour sa voiture de masse M : il projette des balles de tennis de masse m_t contre sa voiture à une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. On négligera les mouvements selon les autres directions que $\vec{e}_x$, en particulier on ne tiendra pas compte de la gravité.

On notera n^* le nombre de balle de tennis par unité de volume, supposé constant et connu. On notera $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x = \dot{x}\vec{e}_x$ la vitesse de la voiture. On notera S la surface (verticale) de la voiture contre laquelle cogne les balles de tennis.

On travaillera parfois dans le référentiel terrestre (galiléen), noté $\mathcal{R}_T$, et parfois dans le référentiel lié à la voiture et en translation par rapport à $\mathcal{R}_T$, noté $\mathcal{R}_V$ (non galiléen a priori). Les vitesses précédemment définies le sont par rapport au référentiel $\mathcal{R}_T$.

On donne la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_V) + \vec{v}(t)$$

Ainsi pour obtenir la vitesse d'un objet par rapport à $\mathcal{R}_T$, il faut ajouter $\vec{v}$ à la vitesse de cet objet par rapport à $\mathcal{R}_V$ et réciproquement, pour obtenir la vitesse d'un objet par rapport à $\mathcal{R}_V$, il faut soustraire $\vec{v}$ à la vitesse de cet objet par rapport à $\mathcal{R}_T$.

1. Intuitivement, quelle est la vitesse maximale v_m à laquelle le petit Philippe pourra amener sa voiture ? Justifier brièvement.

   Dans les questions suivantes, on fera l'hypothèse que $v_x \leq v_m$.
2. On se place dans le référentiel lié à la voiture $\mathcal{R}_V$, quelle est la vitesse $\vec{v}_0' = v_0'\vec{e}_x$ des balles de tennis dans ce référentiel ?
3. En déduire le nombre de balles de tennis frappant la voiture entre t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de v_0', puis en fonction de v_0 et v_x.
4. On considère que les balles rebondissent en repartant à la vitesse $-v_0'\vec{e}_x$ dans le référentiel de la voiture (ce qui revient à supposer que la masse de la voiture est bien supérieure à celle d'une balle de tennis). En
Q16 déduire que la vitesse $\vec{v}_0'' = v_0''\vec{e}_x$ des balles après leur rebond, dans le référentiel terrestre en vaut

$$\vec{v}_0'' = 2\vec{v} - \vec{v}_0$$

5. En utilisant les questions précédentes, déterminer la variation de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre entre t et $t + \mathrm{d}t$ du système fermé $\mathcal{S} = \{$les balles qui vont frapper la voiture entre t et $t + \mathrm{d}t\}$.
6. Montrer alors que la force exercée **par** les balles de tennis **sur la voiture** s'exprime

$$\vec{F}_{t \to v} = 2n^* S m_t (v_0 - v_x)^2 \vec{e}_x$$

7. Vérifier l'homogénéité de la formule précédente.
8. En déduire l'équation du mouvement sur v_x vérifiée par la voiture de masse M.
9. L'équation précédente étant non linéaire, une résolution analytique n'est pas facile. Pour obtenir des informations sur les solutions, tracer l'allure de $\dot{v}_x$ en fonction de v_x.
10. À l'aide de ce schéma et en justifiant votre réponse, conclure quant à l'existence d'une vitesse limite que l'on précisera. Comparer avec votre intuition au début de la partie. (Remarque : attention, il se peut qu'une partie de la courbe que vous avez tracé à la question précédente ne soit pas pertinente compte tenu de l'hypothèse $v_x \leq v_m$).