2.6 Forces centrales-Exercice 6

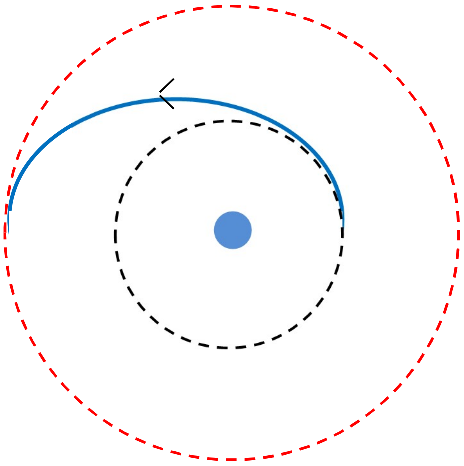
---

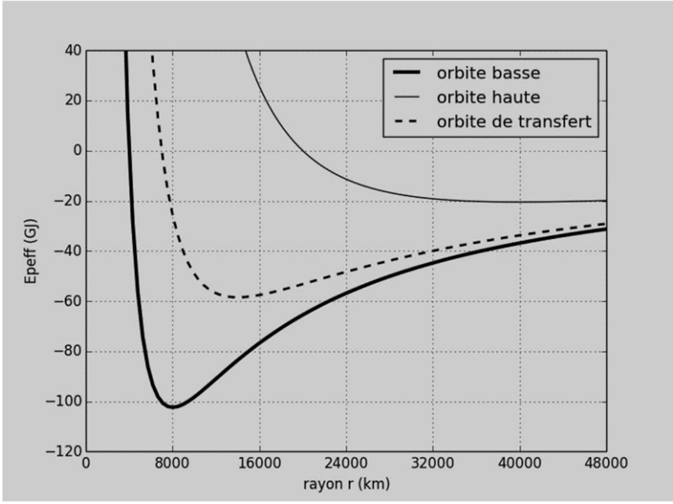
a-Un satellite de masse m a une trajectoire circulaire de rayon R autour de la Terre.
Exprimer l'énergie mécanique E_m du satellite. Que devient cette expression dans le cas d'une trajectoire elliptique de demi-grand axe a ?

b-Dans le cas général, montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$.

Exprimer et dénommer la fonction $E_{peff}(r)$. Que peut-on prévoir sur la nature de la trajectoire du satellite en fonction de la valeur de son énergie mécanique ?

c-Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est d'abord placé sur une trajectoire circulaire basse de rayon 8000 km, puis ensuite sur une trajectoire circulaire haute de rayon 42000 km.
Le passage se fait grâce à une trajectoire de transfert elliptique dont le périgée est sur l'orbite basse et l'apogée sur l'orbite haute.





Quelle est la variation d'énergie mécanique que les moteurs doivent communiquer au satellite pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert ? Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est de 50 $MJ.kg^{-1}$, calculer la masse de carburant nécessaire.

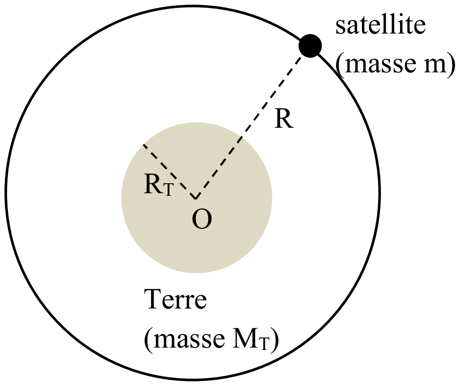
2.6 Forces centrales-Exercice 6

---

a-Loi de la quantité de mouvement au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{R^2}$$

Et $v = R\dot{\theta}$, d'où : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$



$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_T}{2R}$; $E_p = -\frac{GmM_T}{R} = -2E_c$

D'où : $\boxed{E_m = -\frac{GmM_T}{2R}}$

Pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe a :

$$\boxed{E_m = -\frac{GmM_T}{2a}}$$

b-La conservation du moment cinétique pour ce mouvement à force centrale donne : C = $r^2\dot{\theta}$

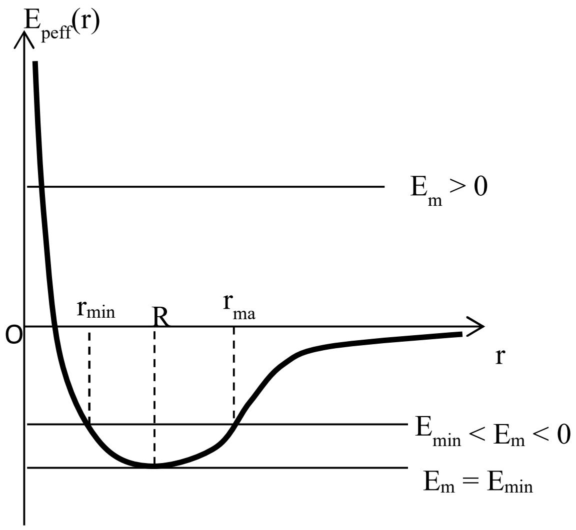
L'énergie mécanique est constante et s'écrit :

$$E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] + E_p(r) = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right] + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$$

Avec : $\boxed{E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GmM_T}{r}}$ appelé *énergie potentielle effective*.

Suivant la valeur de l'énergie mécanique E_m, on obtient les trajectoires suivantes :

- Pour $E_m = E_{min} = -\frac{GmM_T}{2R}$: la trajectoire est un cercle de rayon R, de centre O.
- Pour $E_{min} < E_m < 0$: la trajectoire est une ellipse dont l'un des foyers est O, de demi-grand-axe a.
- Pour $E_m = 0$: la trajectoire est une parabole de foyer O.
- Pour $E_m > 0$: la trajectoire est une hyperbole de foyer O



c-Energie mécanique sur l'orbite basse à 8000km : $E_{mb} \approx$ -100 GJ

Energie mécanique sur l'orbite de transfert :
Au périgée de l'ellipse, on a $\dot{r} = 0$, donc $E_{mt} = E_{peff}$(r=8000 km) $\approx$ -30 GJ

La variation d'énergie mécanique est : $\Delta E_m = E_{mt} - E_{mb}$ A.N : $\Delta E_m = 70$ GJ

La masse de carburant nécessaire est donc : $70.10^9/50.10^6$ = 1400 kg

---