2.4 Particules chargées-Exercice 6

On considère une particule de masse m et de charge q placée sans vitesse initiale en O à l'instant t = 0.
On crée alors un champ magnétique $\vec{B}$ (selon Ox) et un champ électrique $\vec{E}$ (selon Oz) uniformes et stationnaires.

1. Déterminer les équations du mouvement de la particule.

2. Déterminer x(t), y(t), z(t) puis donner la nature et l'allure de la trajectoire. On définira une pulsation ω.
   Déterminer l'ordonnée y_1 de la particule lorsque celle-ci se trouve pour la première fois sur l'axe Oy.
   A.N : la particule est l'ion $^{16}O^{2+}$; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $N_a = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1} ; B = 0,26 T ; E = 26000 V/m

3. Calculer directement la norme de la vitesse à la date t = π/ω.
   Calculer ensuite cette norme en utilisant un théorème de la mécanique classique.

---

1. Théorème de la quantité de mouvement pour la particule dans un référentiel galiléen :

$$m\vec{a} = q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}) \quad \Rightarrow \quad m\begin{vmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{vmatrix} = q\begin{vmatrix}0\\0\\E\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}B\\0\\0\end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=\dfrac{qB}{m}\dot{z}\\ \ddot{z}=\dfrac{qE}{m}-\dfrac{qB}{m}\dot{y}\end{cases}}$$

2. $\ddot{x}=0 \Rightarrow \dot{x} = \text{constante} = 0 \Rightarrow x = \text{constante} = 0 \Rightarrow$ Mouvement dans le plan Oyz

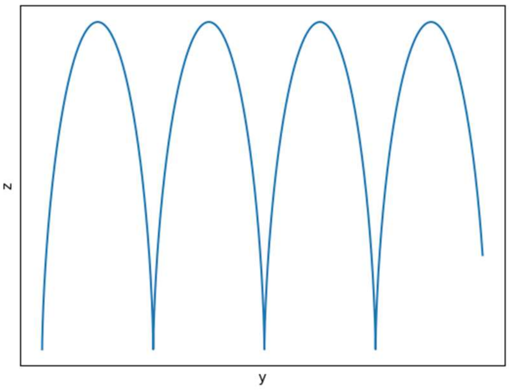
$$\ddot{y}=\frac{qB}{m}\dot{z} \Rightarrow \dot{y}=\frac{qB}{m}z+\text{constante} \Rightarrow \dot{y}=\frac{qB}{m}z \quad \text{car vitesse et position sont nulles à } t=0$$

D'où : $\ddot{z}+\left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 z = \dfrac{qE}{m} \Rightarrow \boxed{z=\dfrac{E}{B\omega}(1-\cos\omega t)}$ avec $\omega=\dfrac{qB}{m}$

Puis : $\dot{y}=\dfrac{qB}{m}\dfrac{E}{B\omega}(1-\cos\omega t) \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{E}{B}\left(t-\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$

On atteint y_1 quand z s'annule une première fois : $\omega t_1 = 2\pi \Rightarrow y_1=\dfrac{2\pi mE}{qB^2}$

Trajectoire : cycloïde



A.N : $m_{ion} = 2{,}65.10^{-26}$ kg ; $y_1 = 0{,}2$ m

3. $\dot{z}\left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)=0 \quad \dot{y}\left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)=\dfrac{2E}{B} \Rightarrow \boxed{v\left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)=\dfrac{2E}{B}}$

Théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{1}{2}mv^2 = \displaystyle\int_0^{\pi/\omega} q\vec{E}.d\vec{r} = qEz\left(\dfrac{\pi}{\omega}\right) = qE\dfrac{2E}{B\omega} \Rightarrow v\left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)=\dfrac{2E}{B}$
