

## 1.7 Induction-Circuit mobile dans B variable-Exercice 1

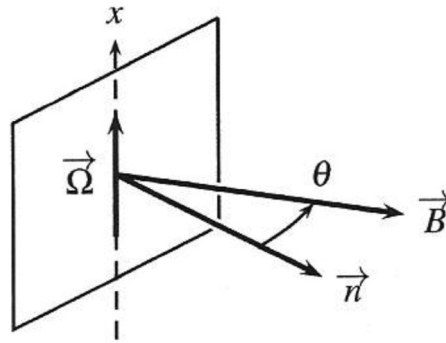
---

Les TGV de troisième génération, tel que l'Eurostar, sont équipés de moteurs électriques alternatifs asynchrones. On étudie dans cet exercice le principe d'un tel moteur.

Un cadre supportant un enroulement plat de  $N$  spires de surface  $S$ , de résistance  $R$  et d'inductance  $L$  tourne à vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'axe vertical  $Ox$ . On note  $\vec{n}$  la normale à la spire.

Le cadre est plongé dans un champ magnétique uniforme, parallèle au plan  $Oyz$ , et tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  constante.

Le dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ entraîne la bobine.



a-Proposer un dispositif permettant de créer un tel champ tournant.

b-Expliquer sans calcul pourquoi la spire tourne. Les deux vitesses  $\omega$  et  $\Omega$  peuvent-elles être identiques ?

c-Etablir l'équation électrique régissant l'évolution du courant dans la bobine.

En déduire l'expression de ce courant en régime sinusoïdal forcé.

d-En déduire l'expression du moment moyen  $\langle \Gamma_L \rangle$  du couple de Laplace appliqué à la bobine. Tracer son évolution en fonction de  $\Omega$ .

e-Le moteur peut-il démarrer seul ? Etudier les différents points de fonctionnement et leur stabilité en fonction du moment résistant moyen  $\Gamma_r$  imposé par la charge (donc les frottements).

---

## 1.7 Induction-Circuit mobile dans B variable-Exercice 1

a-On considère deux bobines identiques orthogonales assimilées à des solénoïdes infinis. Elles sont parcourues par des courants de même amplitude et déphasés de  $\pi/2$ .

Elles créent en O :

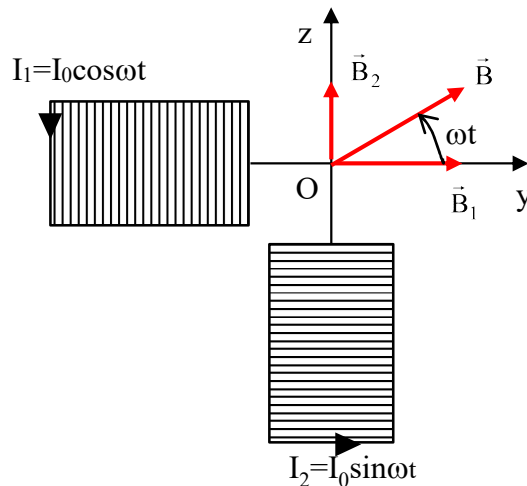
$$\vec{B}_1 = \mu_0 n I_0 \cos \omega t \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 n I_0 \sin \omega t \vec{u}_z$$

Le champ magnétique total :

$$\vec{B} = \mu_0 n I_0 (\cos \omega t \vec{u}_y + \sin \omega t \vec{u}_z)$$

est un champ magnétique tournant autour de l'axe Ox à la vitesse angulaire  $\omega$ .



- b-Le champ magnétique dépend du temps  $\Rightarrow$  flux magnétique variable à travers la spire  
 $\Rightarrow$  f.e.m induite  $e$  dans la spire  
 $\Rightarrow$  courant induit  $i$  dans la spire  
 $\Rightarrow$  la spire possède un moment magnétique  $\vec{M} = i\vec{S}$   
 $\Rightarrow$  couple  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$  subi par la spire  
 $\Rightarrow$  la spire tourne

Si les deux vitesses angulaires sont identiques, le flux magnétique est constant. Il n'y a plus de f.e.m, donc plus de courant, donc plus de couple moteur. Le système ne fonctionne plus.

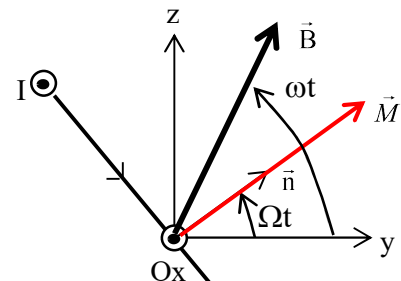
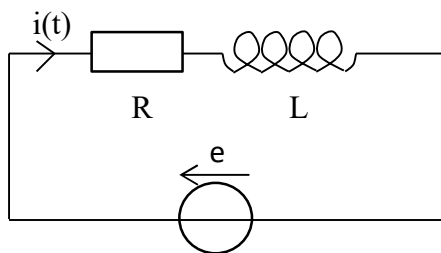
c-Flux magnétique à travers la bobine :

$$\Phi = \iint_{\text{bobine}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N\vec{B} \cdot \vec{S} \text{ car } \vec{B} \text{ est uniforme sur la bobine}$$

$$\Phi = NBS \cos[(\omega - \Omega)t]$$

$$\text{f.e.m induite : } e = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS(\omega - \Omega) \sin[(\omega - \Omega)t]$$

Schéma électrique équivalent à la bobine :



Bobine plate de N spires en rotation autour de l'axe Ox

Loi des mailles :  $e = Ri + L \frac{di}{dt}$  D'où :  $L \frac{di}{dt} + Ri = NBS(\omega - \Omega) \sin(\omega - \Omega)t$

ou encore :  $L \frac{di}{dt} + Ri = NBS(\omega - \Omega) \cos[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2}]$

En régime sinusoïdale forcé,  $i$  sera du même type que le second membre :  $i = I_m \cos[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2} + \varphi]$

En notation complexe :  $\underline{i} = I_m \exp j[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2} + \varphi] = \underline{I} \exp j[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2}]$  avec  $\underline{I} = I_m \exp j\varphi$

## 1.7 Induction-Circuit mobile dans B variable-Exercice 1

L'équation différentielle devient :  $[R + jL(\omega - \Omega)]I \exp j[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2}] = NBS(\omega - \Omega) \exp j[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2}]$

D'où :  $I = \frac{NBS(\omega - \Omega)}{[R + jL(\omega - \Omega)]}$  on en déduit :  $I_m = |I| = \frac{NBS|(\omega - \Omega)|}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega - \Omega)^2}}$  et  $\varphi = \text{Arg}(I)$

$$d\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B} = iSN\vec{n} \wedge \vec{B} = iSNB \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sin(\omega t) \cos(\Omega t) - \sin(\Omega t) \cos(\omega t) \\ \cos(\Omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & 0 & \sin(\omega t) \end{vmatrix} \vec{u}_x$$

Donc :  $\vec{\Gamma}_L = iSNB \sin[(\omega - \Omega)t] \vec{u}_x$

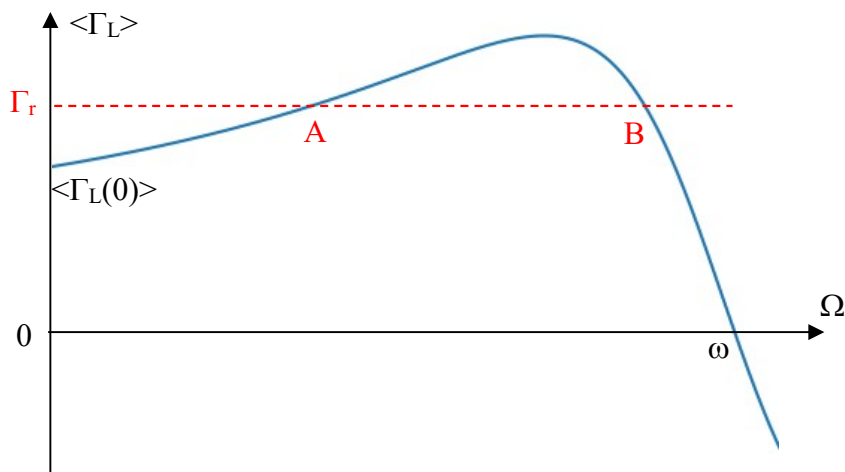
Or :  $i = I_m \cos[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2} + \varphi] = I_m \sin[(\omega - \Omega)t + \varphi]$

Donc :  $\Gamma_L = I_m SNB \sin[(\omega - \Omega)t] \sin[(\omega - \Omega)t + \varphi]$  on a :  $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

D'où :  $\Gamma_L = \frac{1}{2} I_m SNB [\cos \varphi - \cos[2(\omega - \Omega)t + \varphi]]$

En moyenne au cours du temps :  $\langle \Gamma_L \rangle = \frac{1}{2} I_m SNB \cos \varphi$

Or :  $I_m \cos \varphi = \text{Re}(I) = \frac{NBS(\omega - \Omega)R}{[R^2 + L^2(\omega - \Omega)^2]}$  Finalement :  $\langle \Gamma_L \rangle = \frac{N^2 B^2 S^2 (\omega - \Omega) R}{2[R^2 + L^2(\omega - \Omega)^2]}$



e-Le moteur peut démarrer seul car  $\langle \Gamma_L(0) \rangle$  est non nul.

Loi scalaire du moment cinétique par rapport à Ox à la bobine :  $J \frac{d\Omega}{dt} = \langle \Gamma_L \rangle - \Gamma_r$

En régime stationnaire :  $\langle \Gamma_L \rangle = \Gamma_r$ . On trouve graphiquement deux points de fonctionnement A et B.

Etude de l'état A :

Supposons que  $\Omega$  augmente accidentellement par rapport à la valeur  $\Omega_A$  de fonctionnement normal. Le schéma montre que le couple moteur va devenir supérieur au couple résistant. Le moteur va donc aller encore plus vite et s'emballer. Inversement si  $\Omega$  diminue accidentellement par rapport à la valeur  $\Omega_A$  de fonctionnement normal. Le schéma montre que le couple résistant va devenir supérieur au couple moteur. Le freinage l'emporte et  $\Omega$  continue à diminuer jusqu'à l'arrêt.

Conclusion : A est un état instable car quand on s'en écarte, on n'y revient pas.

Inversement B est un état stable.