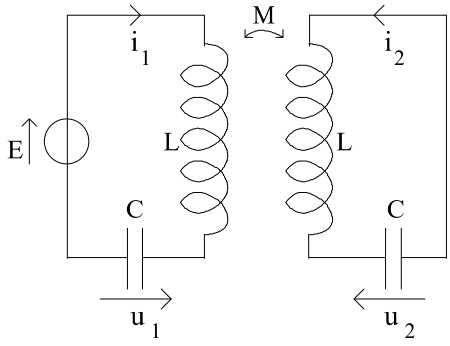
1.7 Induction-Circuit fixe-Exercice 2

On considère deux circuits LC identiques.
Le circuit 1 est alimenté par un générateur de tension idéal de force électromotrice constante E.
Ces deux circuits sont placés à proximité l'un de l'autre.
Ils sont donc couplés par un phénomène d'induction mutuelle.
On note M l'inductance mutuelle, supposée positive, entre les deux circuits.



a-.Ecrire les flux magnétiques Φ_1 et Φ_2 à travers chacun des deux circuits. En déduire les forces électromotrices induites dans chaque circuit.

b-En écrivant la loi des mailles pour chacun des deux circuits, établir les équations différentielles vérifiées par les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ aux bornes des condensateurs.

c-On pose : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $K = \dfrac{M}{L}$. K, compris entre 0 et 1, est appelé coefficient de couplage.

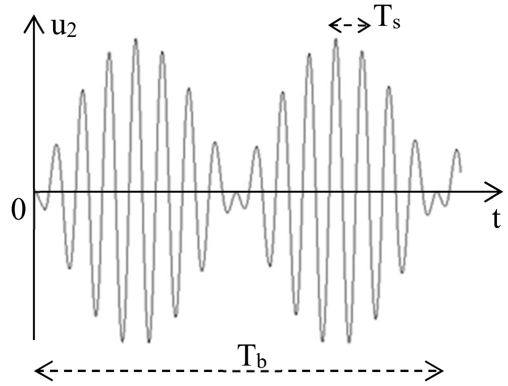
Réécrire les équations précédentes en fonction de ω_0 et K.
En déduire deux équations différentielles pour la somme $S = u_1(t) + u_2(t)$ et la différence $D = u_1(t) - u_2(t)$.

d-Les conditions initiales sont : $u_1(0) = 0$; $u_2(0) = 0$; $i_1(0) = 0$; $i_2(0) = 0$.
En faisant apparaitre deux pulsations ω' et ω'' que l'on exprimera en fonction de ω_0 et K, résoudre les équations pour S et D. En déduire la tension $u_2(t)$.

e-On observe à l'oscilloscope la tension $u_2(t)$ ci-contre.
Exprimer les durées T_b et T_s en fonction de ω' et ω''.

f-On mesure $T_s = 0{,}7$ ms et $T_b = 10$ ms.
En déduire le coefficient de couplage K entre les deux circuits.

g-Comment évolue K lorsqu'on approche ou éloigne les deux circuits ? Quelle serait l'allure de la tension $u_2(t)$ si l'on avait tenu compte de la résistance R des circuits ?



1.7 Induction-Circuit fixe-Exercice 2

---

a- $\boxed{\Phi_1 = Li_1 + Mi_2}$ et $\boxed{\Phi_2 = Li_2 + Mi_1}$

loi de Faraday : $\boxed{e_1 = -\dfrac{d\Phi_1}{dt} = -L\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt}}$ et $\boxed{e_2 = -\dfrac{d\Phi_2}{dt} = -L\dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt}}$

b-Loi des mailles : $E = u_1 - e_1$ et $0 = u_2 - e_2$ avec $i_1 = C\dfrac{du_1}{dt}$ et $i_2 = C\dfrac{du_2}{dt}$ d'où :

$$\boxed{E = u_1 + LC\frac{d^2u_1}{dt^2} + MC\frac{d^2u_2}{dt^2}} \qquad \boxed{0 = u_2 + LC\frac{d^2u_2}{dt^2} + MC\frac{d^2u_1}{dt^2}}$$

c- $\boxed{\omega_0^2 E = \omega_0^2 u_1 + \dfrac{d^2u_1}{dt^2} + K\dfrac{d^2u_2}{dt^2}}$ $\boxed{0 = \omega_0^2 u_2 + \dfrac{d^2u_2}{dt^2} + K\dfrac{d^2u_1}{dt^2}}$

$$\boxed{\omega_0^2 E = \omega_0^2 S + (1+K)\frac{d^2S}{dt^2}} \qquad \boxed{\omega_0^2 E = \omega_0^2 D + (1-K)\frac{d^2D}{dt^2}}$$

d-On a : $S = A'\cos\omega' t + B'\sin\omega' t + E$ avec : $\omega' = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1+K}}$; $D = A''\cos\omega'' t + B''\sin\omega'' t + E$ avec : $\omega'' = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}$

A $t = 0$: $S(0) = 0 = A' + E$; $D(0) = 0 = A'' + E$; $\dot{S}(0) = 0 = \omega' B'$; $\dot{D}(0) = 0 = \omega'' B''$

Donc : $S = E(1 - \cos\omega' t)$ et $D = E(1 - \cos\omega'' t)$ puis : $u_2 = (S - D)/2$

D'où : $\boxed{u_2 = \dfrac{E}{2}(\cos\omega'' t - \cos\omega' t) = -E\sin\left(\dfrac{\omega'' - \omega'}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega'' + \omega'}{2}t\right)}$

e-On observe la modulation du sinus de plus grande pulsation $\dfrac{\omega'' + \omega'}{2} = \dfrac{2\pi}{T_s}$ par le sinus de plus petite pulsation

$\dfrac{\omega'' - \omega'}{2} = \dfrac{2\pi}{T_b}$. D'où : $\boxed{T_b = \dfrac{4\pi}{\omega'' - \omega'}}$ et $\boxed{T_s = \dfrac{4\pi}{\omega'' + \omega'}}$

f- $(\omega'' - \omega')T_b = (\omega'' + \omega')T_s$ => $\omega''(T_b - T_s) = \omega'(T_b + T_s)$ => $\dfrac{(T_b - T_s)^2}{1-K} = \dfrac{(T_b + T_s)^2}{1+K}$

D'où : $K = \dfrac{2T_bT_s}{T_b^2 + T_s^2}$ A.N : $\boxed{K = 0{,}14}$

g-K augmente (resp. diminue) lorsque les circuits se rapprochent (resp. s'éloignent).

En tenant compte de la résistance des circuits, les oscillations de u_2 sont amorties.