

# Chapitre 28

## Déterminants

On fixe un corps  $K$ , deux  $K$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$ , et un entier  $n > 0$ .

### 1 Groupes symétriques

Dans ce paragraphe, on se fixe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### 1.1 Définitions

**Définition 1.1 (Groupe symétrique)**

1. Le *groupe symétrique*  $(\mathcal{S}_n, \circ)$  est le groupe des *permutations* de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ , *i.e.* le groupe des bijections

$$\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

muni de la composition des applications. C'est un groupe à  $n!$  éléments.

2. Pour  $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ , la *transposition*  $(i\ j) \in \mathcal{S}_n$  est la permutation  $\tau$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  définie pour  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$  par

$$\tau(x) = x \quad \text{si } x \neq i, j, \quad \tau(i) = j, \quad \tau(j) = i.$$

3. Un  *$p$ -cycle* ( $p \leq n$ ) est un élément  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  pour lequel il existe  $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$  distincts deux à deux tels que

$$\sigma(x) = x \quad \text{si } x \notin \{i_1, \dots, i_p\}, \quad \sigma(i_k) = i_{k+1} \quad \text{si } k < p, \quad \sigma(i_p) = i_1.$$

On le note  $(i_1\ i_2\ \dots\ i_p)$ .

4. Le *support* d'une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est l'ensemble  $\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) \neq i\}$ .

**Exemples.**

1. Donnons la notation pour un élément quelconque de  $\mathcal{S}_n$  sur un exemple. L'élément  $\sigma \in \mathcal{S}_7$  défini par

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 5, \quad \sigma(3) = 1, \quad \sigma(4) = 4, \quad \sigma(5) = 7, \quad \sigma(6) = 2, \quad \sigma(7) = 6$$

est noté

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Son support est l'ensemble  $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ . Avec cette notation, dans  $\mathcal{S}_8$ , le 5-cycle  $(2 \ 6 \ 1 \ 5 \ 8)$  est noté

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Son support est  $\{1, 2, 5, 6, 8\}$ .

2. Les 2-cycles sont les transpositions.  
 3. Le groupe  $\mathcal{S}_2$  admet 2 éléments : l'identité et la transposition  $(1, 2)$ .  
 4. Pour  $n = 3$ , les 6 éléments de  $\mathcal{S}_3$  sont

$$\text{id}, \quad (1, 2), \quad (1, 3), \quad (2, 3), \quad (1 \ 2 \ 3), \quad (1 \ 3 \ 2).$$

En effet, ces 6 applications sont distinctes deux à deux. Comme  $\mathcal{S}_3$  admet  $3! = 6$  éléments, on les a tous.

5. Dans  $\mathcal{S}_5$  (qui admet 120 éléments), on a par exemple le 4-cycle  $(1 \ 3 \ 2 \ 4)$  et l'élément

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas un cycle.

6. Soient dans  $\mathcal{S}_5$  les permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\sigma\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

En effet, on a par exemple  $\sigma\sigma'(1) = \sigma(\sigma'(1)) = \sigma(3) = 1$ .

7. On a les égalités suivantes entre cycles :

$$(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p) = (i_2 \ i_3 \ \dots \ i_p \ i_1).$$

## Remarques.

1. C'est bien un groupe. En effet, on sait que la composition des applications est associative. l'élément neutre est l'application identité et le symétrique d'une bijection

$$f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

est son application réciproque  $f^{-1}$ .

2. On omettra un général le symbole  $\circ$  de la composition. On notera de manière multiplicative ce groupe, *i.e.* pour  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ , on aura

$$\sigma\sigma' \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \sigma \circ \sigma'.$$

On parlera alors du produit de  $\sigma$  et  $\sigma'$ , en sous-entendant que c'est la composition des permutations dont on parle!

3. Ce groupe est non commutatif si  $n \geq 3$ . En effet, les deux transpositions ne commutent pas puisque

$$(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2) \quad \text{et} \quad (1, 3)(1, 2) = (1\ 2\ 3).$$

Vérifiez l'image de chaque élément de  $\{1, 2, 3\}$  pour démontrer les deux égalités! Par exemple

$$(1\ 2)(1\ 3)(3) = (1\ 2)(1) = 2 \quad \text{et} \quad (1\ 3\ 2)(3) = 2.$$

Regardez bien les notations. Le (3) signifie qu'on applique la permutation à l'élément 3.

4. On considère souvent  $\mathcal{S}_n$  comme un sous-ensemble de  $\mathcal{S}_{n+1}$  de la manière suivante : si  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , on pose  $\sigma(n+1) = n+1$ , ce qui fait que  $\sigma$  est alors un élément de  $\mathcal{S}_{n+1}$ . Ce procédé est injectif, *i.e.* deux éléments distincts de  $\mathcal{S}_n$  sont envoyés sur deux éléments distincts de  $\mathcal{S}_{n+1}$ . Par ce procédé,  $\mathcal{S}_n$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{S}_{n+1}$  des permutations qui fixent  $n+1$ . Plus rigoureusement, on a en fait une fonction  $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$  injective.

### Proposition 1.2 (Décomposition d'un cycle en produit de transpositions)

Soient  $a_1, \dots, a_p \in \{1, \dots, n\}$  deux à deux distincts ( $2 \leq p \leq n$ ). Alors

$$(a_1 \cdots a_p) = (a_1\ a_2) \cdots (a_{p-1}\ a_p).$$

### Proposition 1.3 (Permutations à support disjoint)

Deux permutations de  $\mathcal{S}_n$  à supports disjoints commutent.

### Remarque.

La réciproque est fautive : deux permutations peuvent commuter même si leurs supports ne sont pas disjoints. Par exemple, une permutation commute avec elle-même!

### Proposition 1.4

1. Une transposition  $\tau$  est une involution, *i.e.*

$$\tau^2 = \text{id},$$

ce qui signifie que  $\tau^{-1} = \tau$ .

2. Le symétrique d'un  $p$ -cycle  $(i_1 \cdots i_p)$  est

$$(i_1 \cdots i_p)^{-1} = (i_p\ i_{p-1} \cdots i_1) = (i_1 \cdots i_p)^{p-1},$$

ce qui signifie que  $(i_1 \cdots i_p)^p = \text{id}$ .

### Exemple.

Dans  $\mathcal{S}_5$ , le 4-cycle  $(2\ 3\ 1\ 4)$  a pour symétrique  $(4\ 1\ 3\ 2)$ . Remarquons que

$$(2\ 3\ 1\ 4)^{4-1} = (2\ 4\ 1\ 3) = (4\ 1\ 3\ 2).$$

### **Théorème 1.5**

Toute permutation est un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.

### **Méthode 1.6**

Pour décomposer une permutation  $\sigma$  en produit de cycles à supports deux à deux disjoints, on regarde la suite finie  $(1, \sigma(1), \dots, \sigma^i(1))$ , avec  $\sigma^{i+1}(1) = 1$ . Cela donne un premier cycle. Puis on choisit le plus petit entier qui n'est pas dans cette suite, et on recommence. Par exemple avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On part de 1, dont l'image est 3, dont l'image est 1 : cela nous donne le cycle  $(1\ 3)$ . Puis on part de 2, dont l'image est 5, dont l'image est 4, dont l'image est 2 : cela donne le cycle  $(2\ 5\ 4)$ , et finalement  $\sigma = (1\ 3)(2\ 5\ 4) = (2\ 5\ 4)(1\ 3)$ .

### **Proposition 1.7**

Toute permutation est un produit de transposition.

### **Exemples.**

1. Dans  $\mathcal{S}_4$ , on a

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4).$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 5)(5\ 4).$$

### **Méthode 1.8**

Voici sur l'exemple  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$  une méthode générale pour décomposer une permutation  $\sigma$  en transpositions. On part du plus petit entier dans le support. Ici, c'est 1. Son image est 3, et son image est 1 : cela donne la transposition  $(1\ 3)$ . L'entier suivant qui est dans le support est 2. Son image est 5, dont l'image est 7, dont l'image est 6, dont l'image est 2 : cela donne le produit  $(2\ 5)(5\ 7)(7\ 6)$ . Et finalement  $\gamma = (1\ 3)(2\ 5)(5\ 7)(7\ 6)$ . Vérifiez !

## **1.2 Signature**

### **Définition 1.9 (Signature)**

La signature  $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$  de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)},$$

où  $I(\sigma)$  est le nombre d'inversions de  $\sigma$ , *i.e.* le nombre de couples  $(i, j)$  tels que

$$1 \leq i < j \leq n \quad \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Une permutation est *paire* si sa signature est 1, *impaire* sinon.

**Proposition 1.10**

Pour tous  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ ,  $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ .

**Remarque.**

On peut aussi dire que  $\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$  est un morphisme de groupes.

**Proposition 1.11**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Alors  $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ .

**Corollaire 1.12**

La signature d'un  $p$ -cycle est  $(-1)^{p-1}$  ( $p \geq 2$ ).

## 2 Applications multilinéaires

On fixe dans ce paragraphe un corps  $K$ , deux  $K$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 2.1 (Applications multilinéaires)**

1. Une *application  $n$ -linéaire* de  $E$  dans  $F$  est une application

$$f : E^n \rightarrow F$$

telle que pour tous  $a_1, \dots, a_n \in E$ , tout  $i = 1, \dots, n$ , l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{array}$$

soit linéaire

2. Une *forme  $n$ -linéaire* sur  $E$  est une application  $n$ -linéaire de  $E$  dans  $K$ .

**Remarque.**

On a donc, pour tous  $x, y \in E$  et  $\lambda \in K$ ,

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda x + \mu y, a_{i+1}, \dots, a_n) = \lambda f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) + \mu f(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

**Exemples.**

1. Les applications 1-linéaires sont les applications linéaires.
2. Le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n$  est une forme bilinéaire : si  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  et  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , alors

$$(x + z|y) = \sum_{k=1}^n (x_k + z_k)y_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n z_k y_k = (x|y) + (z|y),$$

et de même  $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ . On fait de même avec la deuxième variable.

3. L'application

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}))^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire. En effet, si  $f, g, h \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_0^1 (\lambda f(x) + g(x))h(x)dx = \lambda \int_0^1 f(x)h(x)dx + \int_0^1 g(x)h(x)dx,$$

ce qui prouve la linéarité par rapport à la première variable. On fait de même pour la deuxième.

4. Le déterminant

$$\begin{aligned} \det : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire : soient  $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} \det(\lambda(x, y) + (x', y'), (x'', y'')) &= \det((\lambda x + x', \lambda y + y'), (x'', y'')) \\ &= (\lambda x + x')y'' - (\lambda y + y')x'' \\ &= \lambda(xy'' - yx'') + (x'y'' - y'x'') \\ &= \lambda \det((x, y), (x'', y'')) + \det((x', y'), (x'', y'')), \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité pour la première variable. On fait de même pour la deuxième.

5. Attention : si  $f$  est bilinéaire,  $f(x + x', y + y') \neq f(x, y) + f(x', y')$ . On a

$$f(x + x', y + y') = f(x, y) + f(x, y') + f(x', y) + f(x', y').$$

### Méthode 2.2

Il faut remarquer que si  $f$  est  $n$ -linéaire, le calcul de  $f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  se passe comme un développement d'un produit (et de même en remplaçant  $x_k + y_k$  par une somme quelconque). Par exemple, si  $f$  est bilinéaire,  $x, y \in E$  et  $a_{ij} \in K$  (pour  $i, j = 1, 2$ , on a

$$f(a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y) = a_{11}a_{12}f(x, x) + a_{11}a_{22}f(x, y) + a_{21}a_{12}f(y, x) + a_{21}a_{22}f(y, y).$$

Comparez avec le produit  $(a_{11}x + a_{21}y) \times (a_{12}x + a_{22}y)$  si tous ces variables sont des réels.

On peut faire de même avec une application trilinéaire et trois vecteurs. Le développement donne  $3^3$  termes.

**Définition 2.3 (Applications multilinéaires symétriques, antisymétriques, alternées)**

Soit  $f$  une application  $n$ -linéaire de  $E$  dans  $F$ . Alors

1.  $f$  est *symétrique* si pour tous  $a_1, \dots, a_n \in E$  et  $i \neq k$ ,

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_i, a_{k+1}, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

2.  $f$  est *antisymétrique* si pour tous  $a_1, \dots, a_n \in E$  et  $i \neq k$

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_i, a_{k+1}, \dots, a_n) = -f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

3.  $f$  est *alternée* si pour tous  $a_1, \dots, a_n \in E$  et  $i \neq k$ ,

$$a_i = a_k \implies f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

**Remarque.**

Cette définition s'applique bien entendu également aux formes  $n$ -linéaires, cas particulier des applications  $n$ -linéaires.

**Exemples.**

1. Le déterminant dans  $\mathbb{R}^2$  vu dans les exemples ci-dessus est une forme bilinéaire alternée et antisymétrique. En effet, on a  $\det((x, y)(x, y)) = 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , et on a  $\det((x, y)(x', y')) = -\det((x', y')(x, y))$ .

2. Le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$  redonné ci-dessus est symétrique, car

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n y_k x_k.$$

3. De même, l'exemple 3 ci-dessus est une forme bilinéaire symétrique puisque si  $f, g$  sont des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , on a

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt.$$

**Proposition 2.4**

Une application  $n$ -linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

**Exemple.**

Voici l'exemple des formes bilinéaires alternées en dimension 2. Si  $E$  est de dimension 2,  $f$  une application bilinéaire alternée de  $E$  vers  $F$ ,  $(e_1, e_2)$  une base de  $E$ ,  $x = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ ,  $y = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$ , alors

$$f(x, y) = a_{11}a_{12}f(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}f(e_1, e_2) + a_{21}a_{12}f(e_2, e_1) + a_{21}a_{22}f(e_2, e_2).$$

Mais  $f$  est alternée, donc  $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$  et  $f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$ , donc

$$f(x, y) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})f(e_1, e_2).$$

**Proposition 2.5**

Soit  $f$  une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $E$ , et  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ .

1. Si la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est liée, alors  $f(u_1, \dots, u_p) = 0$ .
2.  $f(u_1, \dots, u_p)$  reste inchangée si l'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

### 3 Déterminants

Dans ce paragraphe, on suppose que  $\dim(E) = n$ . Cette hypothèse est **fondamentale** pour ce qui suit.

**Théorème 3.1 (Déterminant dans une base de  $n$  vecteurs)**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. Il existe une unique forme  $n$ -linéaire alternée notée  $\det_{\mathcal{B}}$  sur  $E$  telle que

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

2. Toute forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  est proportionnelle à  $\det_{\mathcal{B}}$ .
3. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille de vecteurs de  $E$  et  $A = (a_{ij}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}.$$

**Remarque.**

Dans chaque produit  $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$ , tous les indices apparaissent une et une seule fois, pour l'indice ligne, et pour l'indice colonne.

**Exemples.**

1. Dans  $\mathbb{R}^2$ , le déterminant dans la base canonique de  $(a_{11}, a_{21})$  et  $(a_{12}, a_{22})$  est  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . On peut le vérifier directement avec la formule :  $\mathcal{S}_2$  contient 2 éléments, l'identité, qui est paire, et la transposition  $\tau = (1\ 2)$  qui est impaire, donc

$$\det_{\text{bas. can.}}((a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22})) = a_{11}a_{22} - a_{\tau(1)1}a_{\tau(2)2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , et trois vecteurs  $x, y$  et  $z$  tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23},$$

car

$$\mathcal{S}_3 = \{ \text{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \}.$$

Par exemple, le troisième terme du déterminant ci-dessus est, avec  $\sigma = (1\ 3)$ ,

$$\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} = -a_{31}a_{22}a_{13}.$$

### Théorème 3.2 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour toutes bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $E$ , on a

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')).$$

Ce scalaire, indépendant de toute base, est le *déterminant de  $f$* , et on le note  $\det(f)$ .

### Exemples.

1. On a  $\det(\text{id}_E) = 1$ , puisque si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(\text{id}_E(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$  par définition de  $\det_{\mathcal{B}}$ .
2. Si  $E = A \oplus B$  et  $s$  est la symétrie par rapport à  $A$  parallèlement à  $B$ , alors

$$\det(s) = (-1)^{\dim(B)}.$$

En effet, soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  telle que  $(e_1, \dots, e_r)$  soit une base de  $A$  et  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $B$ . Alors

$$s(e_j) = e_j \text{ pour } j \leq r, \quad s(e_j) = -e_j \text{ pour } j > r.$$

On a

$$\begin{aligned} \det(s) &= \det_{\mathcal{B}}(s(\mathcal{B})) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_r, -e_{r+1}, \dots, -e_n) \\ &\stackrel{n\text{-lin.}}{=} (-1)^{n-r} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n) \\ &= (-1)^{n-r} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = (-1)^{n-r}. \end{aligned}$$

3. Si  $f$  est définie sur la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  par

$$f(e_j) = \lambda_j e_j, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K,$$

on a

$$\det(f) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

En effet,

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) \stackrel{n\text{-lin.}}{=} \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

**Définition 3.3 (Déterminant d'une matrice carrée)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . Le déterminant de  $A$  (noté  $\det(A)$ ) est le déterminant dans la base canonique de  $K^n$  de ses vecteurs colonnes, *i.e.* si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

**Remarque.**

Il faut justifier cette égalité : on applique le théorème 3.1(3) car  $A$  est la matrice des composantes de ses colonnes dans la base canonique de  $K^n$ .

**Exemple.**

Si  $A$  est diagonale, et  $C_1, \dots, C_n$  sont ses colonnes, et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $K^n$ , on a

$$C_i = a_{ii}e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

donc

$$\det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}}(a_{11}e_1, \dots, a_{nn}e_n) = \left( \prod_{i=1}^n a_{ii} \right) \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Notation :** Le déterminant d'une matrice se note avec des barres verticales à la place des parenthèses. Par exemple :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

**Proposition 3.4 (Déterminant de taille 2)**

Soit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$ . Alors  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

**Méthode 3.5 (Déterminant de taille 3 : règle de Sarrus)**

**ATTENTION :** technique uniquement valable pour les déterminants de taille 3!!

Voici une façon de retrouver le déterminant d'une matrice carrée de taille 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

On recopie les deux lignes premières lignes sous la matrice, pour obtenir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

On a 3 "diagonales principales"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & a_{12} & a_{13} & & \\ & & & a_{23} & \end{pmatrix}$$

et on multiplie dans chaque diagonale les éléments, et on ajoute, pour obtenir

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}.$$

On a aussi 3 "diagonales secondaires"

$$\begin{pmatrix} & & & a_{13} & \\ & & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & & & & \end{pmatrix}$$

et on multiplie dans chaque diagonale les éléments, et on ajoute, pour obtenir

$$a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}.$$

On soustrait alors cette deuxième somme à la première, pour obtenir le déterminant :

$$\left( a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \right) - \left( a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} \right).$$

On avait obtenu cela dans les exemples après le théorème 3.1.

### **Théorème 3.6**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . Alors  $\det(A) = \det(A^T)$ .

### **Théorème 3.7**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(K)$ . Alors

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det(A),$$

*i.e.* le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base.

2. Soit  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(A).$$

### **Remarque.**

**Attention :** si on considère la matrice  $A$  d'un endomorphisme  $f$  relative à deux bases différentes au départ et à l'arrivée, alors  $\det(A) \neq \det(f)$  !

**Méthode 3.8**

Nous avons donc trois déterminants :

1. Le déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs dans une base  $\mathcal{B}$  d'un espace de dimension  $n$  (théorème 3.1).
2. Le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (théorème 3.2).
3. Le déterminant d'une matrice carrée (définition 3.3).

Ces trois déterminants sont liés par le théorème 3.7. En pratique, pour calculer un déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme, on passe par ce théorème pour calculer le déterminant d'une matrice carrée. Et pour cela, on utilisera les résultats du paragraphe 5.

**Exemple.**

Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$  est une matrice diagonale, l'endomorphisme  $f$  de  $K^n$  canoniquement associé vérifie

$$f(e_i) = a_{ii}e_i,$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $K^n$ . On retrouve que

$$\det(A) = \det(f) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

## 4 Propriétés des déterminants

Dans ce paragraphe, on suppose toujours que  $\dim(E) = n$ . On fixe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , une famille  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs de  $E$ ,  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  et  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ , sauf mention explicite du contraire.

**Proposition 4.1**

On a

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \iff \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)) \neq 0.$$

**Proposition 4.2**

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  et  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ . On a

1.  $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det(f) \det(g)$  et  $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B)$ .
2. L'endomorphisme  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $\det(f) \neq 0$  et alors

$$\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}.$$

De même, la matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$  et alors

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

3. Si  $\lambda \in K$ , on a

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f), \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

### Proposition 4.3

1. Le déterminant d'une matrice carrée ne change pas si à une colonne (resp. une ligne) on ajoute une combinaison linéaire des **autres**.
2. Le déterminant d'une matrice carrée est multiplié par  $-1$  si on échange deux colonnes ou deux lignes.
3. Le déterminant d'une matrice carrée est nul si deux colonnes ou deux lignes sont égales.
4. Le déterminant d'une matrice carrée est nul si une colonne (resp. ligne) est combinaison linéaire des autres.
5. Si on multiplie une colonne ou une ligne par  $\lambda \in K$ , le déterminant est multiplié par  $\lambda$ .

### Remarques.

1. Attention, on ne peut pas remplacer une ligne  $L_i$  par  $\lambda L_i + \dots$  !
2. Le point 5 nous permet de factoriser une ligne ou une colonne par un scalaire non nul.

### Exemples.

$$1. \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 14 & 21 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \text{ en mettant 7 en facteur dans la troisième ligne.}$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} 8 & -4 & 16 \\ 3 & 7 & 2 \\ -4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ en mettant 4 en facteur dans la ligne 1 et la ligne 3, donc on factorise deux fois par 4!!!}$$

$$3. \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ en échangeant les colonnes 1 et 3, d'où le -1 car le déterminant est alterné, et en soustrayant la première ligne à la deuxième et la troisième.}$$

## 5 Développement suivant une ligne ou une colonne

Dans ce paragraphe on se concentre sur le calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée. Le théorème 3.7 permet alors de calculer le déterminant d'un endomorphisme et d'une famille de vecteurs.

**ATTENTION** : La plupart du temps, vous aurez à calculer des déterminants de matrices qui dépendent d'un ou de plusieurs paramètres, et on cherchera à savoir à quelle(s) condition(s) ce

déterminant est nul. On cherchera donc absolument à obtenir une forme factorisée du déterminant. En particulier, pour un déterminant de taille 3, la règle de Sarrus ne servira que pour un déterminant numérique.

**Proposition 5.1**

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , et

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} a_{11} & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(K),$$

où  $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ ,  $a_{11} \in K$  et  $\star$  désigne n'importe quel élément de  $K$ . Alors

$$\det(A) = a_{11} \det(A').$$

En particulier, si  $A$  est une matrice triangulaire (ou diagonale),

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

**Exemple.**

On a

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -(2 \times (-5) - (-5) \times (-7)) = 45$$

(trouvez et justifiez les opérations effectuées).

**Définition 5.2 (Mineur, cofacteur)**

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ .

1. Le *mineur* de  $a_{ij}$  est le déterminant  $\Delta_{ij}$  de la matrice carrée de taille  $n-1$  obtenue en supprimant dans  $A$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne.
2. Le *cofacteur* de  $a_{ij}$  est  $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ .

**Exemple.**

Soit

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les mineurs de  $a_{22}$  et  $a_{23}$  sont respectivement les déterminants

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

**Théorème 5.3 (Développement suivant une ligne/colonne)**

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ .

1. Pour tout  $j = 1, \dots, n$ , on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad (\text{Développement suivant la } j^{\text{ème}} \text{ colonne}).$$

2. Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad (\text{Développement suivant la } i^{\text{ème}} \text{ ligne}).$$

### Exemples.

1. On a, en développant par rapport à la deuxième ligne, puis en utilisant Sarrus,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(7 + 6 - 4 + 56 - 1 - 3) + 3(2 - 2 - 16 - 8 - 4 - 2) + 2(2 - 14 + 12 + 6 - 28 - 2) \\ &= -199. \end{aligned}$$

2. On veut mettre sous forme factorisée le déterminant  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 1 & \sin(y) & \cos(y) \\ 1 & \sin(z) & \cos(z) \end{vmatrix}$ . En soustrayant la première ligne aux deux autres, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \sin(y) - \sin(x) & \cos(y) - \cos(x) \\ 0 & \sin(z) - \sin(x) & \cos(z) - \cos(x) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{dév. col. 1}}{=} \begin{vmatrix} \sin(y) - \sin(x) & \cos(y) - \cos(x) \\ \sin(z) - \sin(x) & \cos(z) - \cos(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) & -2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \\ 2 \sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \cos\left(\frac{z+x}{2}\right) & -2 \sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \sin\left(\frac{z+x}{2}\right) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{fact. ligne 1}}{=} 2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) & -\sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \\ 2 \sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \cos\left(\frac{z+x}{2}\right) & -2 \sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \sin\left(\frac{z+x}{2}\right) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{fact. ligne 2}}{=} 4 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) & -\sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{z+x}{2}\right) & -\sin\left(\frac{z+x}{2}\right) \end{vmatrix} \\ &= 4 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \left( -\cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \sin\left(\frac{z+x}{2}\right) + \cos\left(\frac{z+x}{2}\right) \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \right) \\ &= 4 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \sin\left(\frac{y-z}{2}\right) \end{aligned}$$

On voit bien ici que l'utilisation de la règle de Sarrus ne serait pas une bonne idée!

## 6 Applications

### 6.1 Comatrice

#### Définition 6.1 (Comatrice)

La *comatrice* de  $A$  est sa matrice des cofacteurs, *i.e.* la matrice  $\text{co}(A) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$  avec

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

#### Proposition 6.2

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . Alors

$$A^t \text{co}(A) = {}^t \text{co}(A) A = \det(A) I_n.$$

En particulier, si  $A$  est inversible, on a

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} {}^t \text{co}(A).$$

#### Exemple.

Vous connaissez déjà ce résultat pour les matrices carrées de taille 2. Si  $ad - bc \neq 0$ , on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On utilise parfois cette méthode pour les matrices de taille 3, mais pas au-delà : les calculs sont trop nombreux.

### 6.2 Formules de Cramer

#### Définition 6.3 (Système de Cramer)

Un *système de Cramer* est un système linéaire à  $n$  équations et  $n$  inconnues qui admet une et une seule solution, *i.e.* un système  $AX = B$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ , où  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$  et  $A \in GL_n(K)$ .

#### Proposition 6.4

Soit  $A \in GL_n(K)$  et  $S$  le système

$$AX = B,$$

(c'est un *système de Cramer*), où  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ . L'unique solution  $(x_1, \dots, x_n)$  de ce système vérifie pour tout  $j = 1, \dots, n$

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

où  $A_j$  est la matrice obtenue en remplaçant dans  $A$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne par  $B$ .

#### Remarque.

Cette proposition ne sert quasiment jamais pour une résolution pratique, sauf pour  $n = 2$  et peut-être  $n = 3$ , mais jamais au-delà car les calculs sont trop nombreux (calculs de  $n + 1$  déterminants de taille  $n$ ). L'utilité est plus théorique, quand on veut par exemple étudier la continuité d'une solution par rapport aux coefficients.