TP n°12
La catapulte.

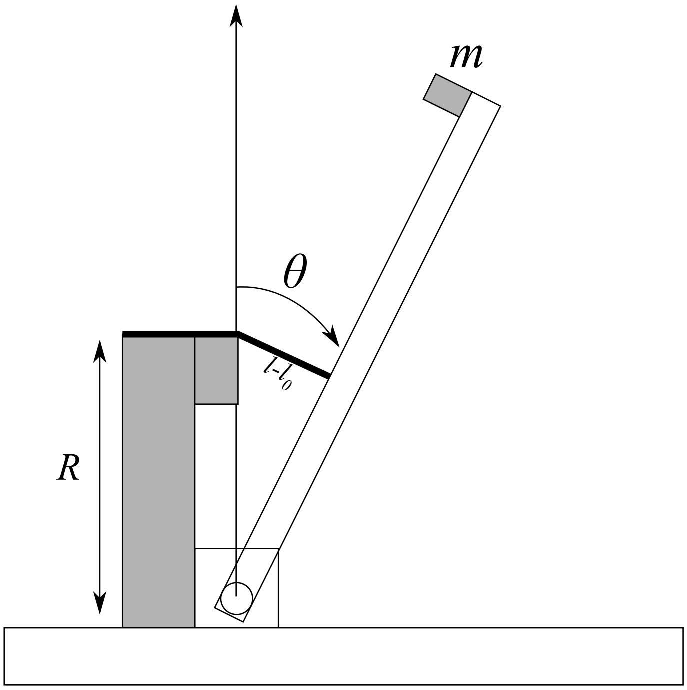
PCSI$_2$ 2025 – 2026

La catapulte est une arme de jet utilisée dans l'antiquité pour lancer des projectiles à grandes distances. La catapulte est capable de projeter de lourdes pierres ou, parfois même, des cadavres ou diverses déjections pour contaminer les réserves d'eau, ceci afin de saper fortement le moral de l'ennemi, lui faire peur, voire propager des infections. La force de propulsion a d'abord été donnée par la flexion d'un arc géant puis, dans les engins plus perfectionnés, par la torsion d'un « ressort » constitué d'un faisceau de fibres. La catapulte est souvent confondue avec le trébuchet. Ce dernier est actionné par un contre-poids et était utilisé au moyen-âge. Plus récemment des catapultes ont été utilisées pour projeter des visiteurs dans un parc d'attraction dans les années 1990, ou encore par des trafiquants de marijuana entre le Mexique et les États-Unis.
L'objectif de ce TP est d'étudier la dynamique de la catapulte.

I Mise en équation

On considère la catapulte modélisée ci-dessous. Un élastique idéal de raideur k et de longueur à vide l_0 actionne un bras de longueur L et de masse M. Au bout de ce bras, on place un projectile de masse m. On repère la position du bras par l'angle θ qu'il forme avec la verticale. Initialement, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et le projectile est lancé pour $\theta = 0$. On note J, le moment d'inertie du bras seul autour de son axe de rotation, le moment d'inertie de l'ensemble $\{$bras + projectile $\}$ vaut donc $J' = J + mL^2$. Expérimentalement, on s'arrange pour que la longueur du ressort vaille l_0 lorsque $\theta = 0$.

1. Exprimer l'élongation de l'élastique en fonction de l'angle θ et de la distance R entre l'axe du bras et le point d'attache de l'élastique.
2. Exprimer l'énergie potentielle élastique en fonction de θ, R et k.
3. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du bras et du projectile.
4. On néglige tout frottement et on suppose que la liaison pivot et parfaite. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour trouver la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ à l'éjection.
5. Que vaut la vitesse du projectile à l'éjection ?
6. En déduire la portée du tir en fonction des paramètres du système.



II Mesure des paramètres

1. Mesurer d ainsi que les dimensions du bras de la catapulte. Celui-ci est en chêne de masse volumique $\rho = 850$ kg.m^{-3}, que vaut sa masse ?
2. Retourner la catapulte et mesurer la période d'oscillation du bras. On rappelle que celle-ci vaut $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mg\frac{L}{2}}}$, en déduire la valeur du moment d'inertie J.
3. Pour estimer la raideur de l'élastique, on peut accrocher celui-ci à une potence et tirer dessus à l'aide d'un dynamomètre ou de masses calibrées. Mesurer l'élongation Δl du ressort pour différentes forces de traction F. Estimer la constante de raideur à l'aide d'une régression linéaire réalisée au sein d'un script Python.
4. Dans ce même script Python, définir les paramètres (M, m, J, J', L, g, R.) en leur affectant leur valeur dans les unités du système international.
5. Évaluer numériquement $\dot{\theta}$ puis la portée du tir et stocker leurs valeurs respectives dans deux variables.

III Comparaison

— Armer la catapulte, viser, tirer. Mesurer la portée D du tir. Recommencer un grand nombre de fois.
— Stocker toutes les valeurs de D dans une liste Python. Évaluer la moyenne puis l'écart-type de la distribution de D.
— En déduire l'incertitude-type sur la mesure de D.
— Évaluer l'écart-normalisé (ou z-score) entre la valeur théorique et la valeur mesurée. Conclure.

IV Évaluation des frottements

1. Quelles sont les sources de frottements possibles ?
2. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, exprimer le travail des forces de frottements pendant la phase de lancée en fonction des paramètres et de $\dot{\theta}$ à l'éjection.

3. Filmer le tir avec votre téléphone. Déposer la vidéo sur l'ordinateur et convertir la vidéo en ficher .avi.
4. Ouvrir la vidéo avec Latis-Pro et pointer la position du projectile.
5. En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ à l'éjection.
6. Évaluer numériquement le travail des forces de frottements et le comparer au travail de l'élastique.
7. La valeur de $\dot{\theta}$ à l'éjection est-elle en accord avec la mesure de D ? (On pourra calculer un Z-score.)