DM 12 - Algèbre : revision - Variable aléatoire - Analyse

2025-2026

Exercice 1 :

Un fabricant d'oeufs de Pâques en chocolat dispose de deux machines pour confectionner des oeufs fourrés pralinés. La machine A réalise les trois quarts de la production et la machine B un quart.

Certains oeufs sont défectueux : ils sont vides...

La probabilité que la machine A (resp. B) produise un oeuf défectueux est $0,1$ (resp. $0,2$).

1. Première situation : les oeufs en provenance des deux machines sont mélangés **avant** d'être conditionnés dans des boîtes de n oeufs.
   (a) On prend un oeuf au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit vide ?
   (b) Soit X la v.a. donnant le nombre d'oeufs vides dans une boîte. Déterminez sa loi et son espérance.
2. Deuxième situation : chaque machine conditionne elle-même les oeufs qu'elle fabrique dans des boîtes de n oeufs ($n \geq 2$, le même n pour les deux machines).
   (a) On prend une boite provenant de la machine A. Quelle est la loi du nombre d'oeufs vides dans cette boite ? Même question pour une boite provenant de la machine B.
   (b) Toutes les boîtes sont maintenant mélangées et entreposées ensemble (peu importe la machine dont elles proviennent). On prend au hasard une boîte. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'oeufs vides dans celle-ci. Déterminez la loi de Y et son espérance.
   (c) On a pris une boite au hasard, et aucun oeuf n'était vide : quelle est la probabilité (en fonction de n) que la boîte provienne de la machine A ?

1. (a) Soit A (resp B) l'événement "l'oeuf a été confectionné par la machine A" resp. (B).
   Soit V l'événement "l'oeuf est vide".
   D'après l'énoncé, $P(A) = \dfrac{3}{4}$ et $P(B) = \dfrac{1}{4}$
   De plus $P_A(V) = \dfrac{1}{10}$ et $P_B(V) = \dfrac{2}{10}$
   A et B constituent un système complet d'événements et donc, d'après la formule des probabilités totales :
   $$P(V) = P(A)P_A(V) + P(B)P_B(V) = \frac{3}{4}\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\frac{2}{10} = \frac{1}{8}$$
   (b) On peut voir le remplissage d'une boite comme la répétition de n expériences de type succès/échec (où le "succès" est "avoir un oeuf vide") de manière indépendante dans les mêmes conditions (les oeufs sont mélangés avant la mise en boite). La variable X compte le nombre de succès, et on a donc une binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{8}$, d'où
   $$\boxed{X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{8}) \text{ et } E(X) = \frac{n}{8}}$$
2. (a) Si on prend une boite de la machine A, chaque oeuf a une probabilité de 0.1 d'être vide. Ainsi, dans une boîte de la machine A, on a une répétition de n succès/échec, indépendants. Et donc, sachant qu'on est dans la machine A, $X \sim \mathcal{B}(n, \dfrac{1}{10})$.
   De même, sachant qu'on est dans la machine B, $X \sim \mathcal{B}(n, \dfrac{2}{10})$.
   (b) On a $Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$
   Notons C_A (respectivement C_B) l'événement "la boite a été conditionnée par A" (respectivement par B)
   On obtient la loi de Y via la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $\{C_A, C_B\}$:
   $$\forall k \in [\![0, n]\!], P(Y = k) = P(C_A)P_{C_A}(Y = k) + P(C_B)P_{C_B}(Y = k)$$
   d'où
   $$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], P(Y = k) = \frac{3}{4}\binom{n}{k}\frac{1}{10^k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} + \frac{1}{4}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^{n-k}}$$
   Pour calculer $E(Y)$, on peut s'épargner tout le calcul en faisant apparaitre une formule nous permettant de reconnaître des espérances de loi binomiale.
   Ainsi :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\binom{n}{k}\frac{1}{10^k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} + \frac{1}{4}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^{n-k}\right)\\
&= \frac{3}{4}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\frac{1}{10^k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}}_{\text{espérance d'une } \mathcal{B}(n,\frac{1}{10})} + \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^{n-k}}_{\text{espérance d'une } \mathcal{B}(n,\frac{2}{10})}\\
&= \frac{3}{4}n\frac{1}{10} + \frac{1}{4}n\frac{2}{10} = n\frac{5}{40}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{E(Y) = \frac{n}{8}}$.... la même chose que dans la première situation !

(c) Aucun oeuf n'est vide correspond à l'événement $(Y = 0)$.

On cherche donc $P_{Y=0}(C_A) = \dfrac{P(C_A \cap Y = 0)}{P(Y = 0)}$.

Or $P(Y=0) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{8}{10}\right)^n = \dfrac{1}{4\times 10^n}(3\times 9^n + 8^n)$

et $P(C_A \cap Y = 0) = P(C_A)P_{C_A}(Y=0) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n = \dfrac{1}{4\times 10^n}(3\times 9^n)$ d'où

$$\boxed{P_{Y=0}(C_A) = \frac{3\times 9^n}{3\times 9^n + 8^n}}$$

Exercice 2 :

Soit la $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On définit l'application f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, dans cet exercice, quand il est dit "$u \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$", il est conseillé d'écrire $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour pouvoir calculer $f(u)$.

1. Montrez que pour tout $u, v \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$E_\lambda = \{u \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\, f(u) = \lambda u\}$$

   (a) Justifiez que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est un sous espace vectoriel.
   (b) Déterminez les deux seuls valeurs de λ pour lesquels E_λ est de dimension 1, et donner une base dans chacun de ces cas. On notera λ_1 et λ_2 ces deux valeurs, avec $\lambda_1 < \lambda_2$
   (c) Montrez que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

3. Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs bases respectivement de E_{λ_1} et E_{λ_2}.
   (a) Montrez que P est inversible et calculez P^{-1}
   (b) Calculez $P^{-1}AP$.

1. Les propriétés calculatoire sur les matrices permettent de répondre assez immédiatement. Pour tout $u, v \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + \mu v) &= A(\lambda u + \mu v)\\
&= \lambda Au + \mu Av\\
&= \lambda f(u) + \mu f(v)
\end{aligned}$$

2. (a) On remarque que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien dans E_λ car $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, E_λ est non vide.

Considérons maintenant u et v dans E_λ. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a, d'après la question 1,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

De plus, comme u et v sont dans λ, on obtient :

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha\lambda u + \beta\lambda v = \lambda(\alpha u + \beta v)$$

Ainsi, $\alpha u + \beta v$ vérifie bien la relation de E_λ, donc $\alpha u + \beta v \in E_\lambda$.

On a bien un s.e.v.

(b) soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Alors

$$\begin{aligned} u \in E_\lambda &\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rl} y & = \lambda x \\ \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}y & = \lambda y \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rl} \frac{2}{9}x + (\frac{1}{3} - \lambda)y & = 0 \\ -\lambda x + y & = 0 \end{array} \right. \\ &\underset{L_2 \leftarrow \lambda L_1 + \frac{2}{9}L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} \frac{2}{9}x + (\frac{1}{3} - \lambda)y & = 0 \\ (\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\lambda - \lambda^2)y & = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce système admet une infinité de solution (et donc E_λ n'est pas réduit à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) si et seulement si $\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{9} = 0$, c'est à dire si et seulement si $\boxed{\lambda = -\frac{1}{3} \text{ ou } \lambda = \frac{2}{3}}$

Ainsi, $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$ et $\lambda_2 = \frac{2}{3}$

Pour $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$,

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \frac{1}{3}x + y & = 0 \\ \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}y & = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \frac{1}{3}x + y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = -3y \\ y & \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} / u = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E_{\lambda_1} = Vect(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix})}$

De même, $\boxed{E_{-\frac{2}{3}} = Vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})}$.

(c) Comme $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, elles constituent une famille libres de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Comme de plus $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 2, la famille $(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Par juxtaposition des bases, E_{λ_1} et E_{λ_2} sont supplémentaires

3. (a) On suit la description proposée, et on a $P = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Avec la formule du déterminant, on a immédiatement P inversible et :

$$P^{-1} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

.

(b) On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Exercice 3 : adapté d'un sujet HEC ECT

Dans tout ce problème, on considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = 5x\, e^{-x}.$$

On rappelle que $2{,}7 < e < 2{,}8$.

1. (a) Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Explicitez f' et f''. Dressez le tableau de variation de la fonction f.
   (b) Montrez que $f(1) < 2$ et que $f(2) > 1$.
2. On introduit l'intervalle $I = [1; 2]$.
   (a) Montrez que : $\forall x \in I, \quad f(x) \in I$.
   (b) Démontrez que la fonction f admet au moins un point fixe α dans l'intervalle I, c'est-à-dire un réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (vous ne chercherez pas à calculer α).
   (c) Montrez que f' est décroissante sur I.
   (d) En déduire que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq (5/e^2)$ et que f est $(5/e^2)$-lipschitzienne sur l'intervalle I (Vous rappellerez ce que cela signifie).
   (e) Démontrez que α est en fait le seul point fixe de f dans l'intervalle I.
3. On introduit maintenant la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 5\, u_n\, e^{-u_n}.$$

   (a) Montrez que la suite u est bien définie et que tous ses termes sont dans I.
   (b) Justifiez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{e^2}\, |u_n - \alpha|.$$

   (c) Déduisez-en que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{e^2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
   (d) Montrez que la suite (u_n) est convergente et donnez sa limite.
4. Nous allons établir que deux termes consécutifs de la suite (u_n) ne peuvent pas être égaux. Pour cela, on procède par l'absurde : on suppose qu'il existe des termes consécutifs de la suite qui sont égaux et on introduit $p \in \mathbb{N}$ le premier rang tel que $u_p = u_{p+1}$.
   (a) Montrez qu'on a $u_p = \alpha$, que $p \geq 1$ et que $u_{p-1} \neq u_p$.
   (b) Prouvez qu'il existe un réel c strictement compris entre u_{p-1} et u_p tel que $f'(c) = 0$.
   (c) Soulignez une contradiction et concluez.
5. La question précédente nous permet d'introduire la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}.$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < u_{n+1}$. Prouvez l'existence d'un réel c_n appartenant à l'intervalle $]u_n; u_{n+1}[$ tel que $t_n = f'(c_n)$. Que devient ce résultat dans le cas où $u_n > u_{n+1}$?
   (b) On pose $a_n = \min(u_n, u_{n+1})$ et $b_n = \max(u_n, u_{n+1})$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < c_n < b_n$.
   (c) Montrez que, pour tous réels x et y,

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right).$$

   Déduisez-en que la suite (b_n) converge vers α. Que dire de la suite (a_n) ?
   (d) Concluez que $\lim_{n\to+\infty} t_n = f'(\alpha)$.

1. (a) Par composition et produit de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Le calcul donne alors, pour tout $x > 0$,

$$\boxed{f'(x) = 5e^{-x}(1 - x) \text{ et } f''(x) = 5e^{-x}(x - 2)}$$

Notons enfin que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et que par croissance comparée, on a aussi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ce qui donne le tableau ci dessous :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{5}{e}$	$\searrow$	0

(b) $f(1) = \frac{5}{e}$. Or $2,7 < e$ donc $5 < 2 \times 2{,}7 < 2e$
Ainsi, $f(1) = \frac{5}{e} < 2$.
De plus : $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $e < 2{,}8 < 3$, donc $e^2 < 3^2 < 10$ et donc $f(2) = \frac{10}{e^2} > 1$.
Conclusion : $\boxed{f(1) < 2 \text{ et } f(2) > 1.}$

2. (a) Comme f est décroissante sur $I = [1, 2]$, on obtient pour tout $x \in I$, c'est à dire $1 \leq x \leq 2$ que $f(1) \geq f(x) \geq f(2)$
D'après la question $1b$, on a donc bien $2 \geq f(x) \geq 1$, c'est à dire que $\boxed{f(x) \in I}$.

(b) On pose $g : x \mapsto f(x) - x$.
Alors g est continue par combinaison linéaire de fonction continue et comme $f(1) \in I$, donc $f(1) \geq 1$, on obtient $g(1) = f(1) - 1 \geq 0$.
De plus, $g(2) = f(2) - 2$ avec $f(2) \in [1, 2]$, donc $g(2) \leq 0$.
Ainsi, 0 est compris entre $g(1)$ et $g(2)$, avec g continue, donc d'après le TVI, il existe $\alpha \in [1, 2]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire $\boxed{f(\alpha) = \alpha.}$

(c) En $1a$), on a calculé $f''(x) = 5e^{-x}(x - 2)$, donc si $x \in [1, 2]$, $x - 2 \leq 0$ et donc $f''(x) \leq 0$. $\boxed{\text{Ainsi } f' \text{ est décroissante sur } [1, 2].}$

(d) Par décroissance de f', si $1 \leq x \leq 2$, on a $f'(1) \geq f'(x) \geq f'(2)$, c'est à dire

$$0 \geq f'(x) \geq -5e^{-2}$$

Finalement, on a donc bien $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{5}{e^2}}$

f est donc dérivable sur $[1, 2]$ avec $|f'(x)| \leq \frac{5}{e^2}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $x \in I$,

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq \frac{5}{e^2}|x - y|}$$

C'est exactement la définition d'une fonction $\frac{5}{e^2}$-lipschitzienne

(e) Soit α et β deux points fixes de f dans I.
La relation précédente appliquée à $x = \alpha$ et $y = \beta$ donne
$|\alpha - \beta| \leq \frac{5}{e^2}|\alpha - \beta|$
C'est à dire $|\alpha - \beta|(1 - \frac{5}{e}^2) \leq 0$.
Comme $e \geq 2,7$, $e^2 > 5$ et donc $1 - \frac{5}{e^2} > 0$.
De plus, $|\alpha - \beta| \geq 0$, donc $|\alpha - \beta|(1 - \frac{5}{e^2}) \leq 0$ implique $|\alpha - \beta| = 0$, c'est à dire $\boxed{\alpha = \beta.}$
Il y a bien un seul point fixe sur I.

3. (a) Comme f est en réalité définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas de problème de définition pour la suite (u_n).
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
On a déjà $u_0 = 1 \in I$ donc la propriété est initialisée.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in I$.
Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I)$. Or d'après la question $2a$), $f(I) \subset I$, donc $u_{n+1} \in I$.

(b) On applique l'inégalité obtenue en $2d$ avec $x = u_n$ et $y = \alpha$, ces deux quantités étant dans bien dans I. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, on a alors immédiatement

$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{e^2}|u_n - \alpha|}$$

(c) C'est une récurrence rapide :
Elle est initialisée car $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{5}{e^2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$ (c'est même égal...)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{e^2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Alors d'après la question 3b, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{5}{e^2}\right) |u_n - \alpha| \underset{HR}{\leq} \left(\frac{5}{e^2}\right) \left(\frac{5}{e^2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

D'où

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{5}{e^2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

et la propriété est héréditaire.
Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Comme $e > 2,7$, $e^2 > 5$, donc $|\frac{5}{e^2}| < 1$ et $\lim \left(\frac{5}{e^2}\right)^n = 0$.

Par encadrement, on en déduit que $|u_n - \alpha| \to 0$ et donc que (u_n) est convergente avec $\boxed{\lim u_n = \alpha.}$

4. (a) Comme $u_0 = 1$ et que $f(1) \neq 1$, on a déjà $p \neq 0$, donc $p \geq 1$.
De plus, p est le premier entier tel que $u_p = u_{p+1}$, et $p - 1 < p$, donc u_{p-1} ne peut pas valoir u_p.
De plus, si $u_{p+1} = u_p$, alors $f(u_p) = u_p$ donc u_p est un point fixe.
Comme $u_p \in I$ et qu'il n'y a qu'un seul point fixe dans I, on a $\boxed{u_p = \alpha}$.

(b) On ne sait pas si $u_{p-1} < u_p$ ou $u_{p-1} > u_p$, mais en notant A l'intervalle $[u_{p-1}, u_p]$ ou $[u_p, u_{p-1}]$, on a $A \subset I$, donc f continue sur A et dérivable sur l'intérieur de A
De plus, $f(u_{p-1}) = u_p = \alpha$ et $f(u_p) = u_{p+1} = u_p = \alpha$ également. On est donc das les conditions d'application du théorème de Rolle et il existe donc c dans l'intérieur de A, c'est à dire strictement compris entre u_{p-1} et u_p, tel que $f'(c) = 0$.

(c) c est dans l'intérieur de A, donc $cin]1, 2[$. L'étude de f n'a montré qu'un seul point où f' s'annule : c'est en 1.
Il y a donc une contradiction.
Conclusion : $\boxed{\text{deux termes consécutifs de la suite ne sont jamais égaux.}}$

5. (a) Si $u_n < u_{n+1}$, la fonction f est continue sur $[u_n, u_{n+1}]$ et dérivable sur $]u_n, u_{n+1}[$, donc d'après le théorème des accroissement fini, il existe $c \in]u_n, u_{n+1}[$ tel que $f(u_{n+1}) - f(u_n) = f'(c)(u_{n+1} - u_n)$.
On note c_n ce nombre et on remarque que
$f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.
Comme $u_{n+1} \neq u_n$, on peut diviser et il vient alors $\boxed{t_n = f'(c_n)}$

Dans le cas $u_n > u_{n+1}$, on a la même chose avec $\boxed{c_n \in]u_{n+1}, u_n[}$

(b) Il suffit de faire une disjonction de cas :
si $u_n < u_{n+1}$, alors $a_n = u_n$ et $b_n = u_{n+1}$. D'après le premier cas, on a $c_n \in]u_n, u_{n+1}[$, donc $a_n < c_n < b_n$.
Si $u_n > u_{n+1}$, alors cette fois $a_n = u_{n+1}$et $b_n = u_n$: c'est le second cas de la question précédente, avec $c_n \in]u_{n+1}, u_n[$ et à nouveau $a_n < c_n < b_n$.
Dans tous les cas, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_n < c_n < b_n}$$

(c) Encore une disjonction de cas :
si $x \leq y$, alors $max(x, y) = y$, d'une part,
et d'autre part comme $x - y \leq 0$, on a $|x - y| = y - x$, donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + y - x) = \frac{2y}{2} = y$.
De même, si $x > y$, alors $\max(x, y) = x$ et cette fois $|x - y| = x - y$, donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = \frac{2x}{2} = x$
Dans tous les cas, on a bien $\boxed{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = max(x, y)}$

Ainsi, comme $b_n = max(u_n, u_{n+1})$ on a $b_n = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1} + |u_n - u_{n+1}|)$
Or $\lim u_n = \alpha$, donc $\lim u_{n+1} = \alpha$ également et donc $\lim u_n - u_{n+1} = 0$.
Ainsi $\lim b_n = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha + 0) = \alpha$.
Pour a_n, on montre de la même façon que

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

et un calcul tout à fait similaire donne directement $\lim a_n = \alpha$

(d) Par encadrement, on a $\lim c_n = \alpha$ également.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ et donc f' est continue.
Ainsi $\lim f'(c_n) = f'(\alpha)$, c'est à dire $\boxed{\lim t_n = f'(\alpha)}$