

Corrigé du DL n° 6.

Problème

Partie 1

1. Déjà vu en exercice.
2. Si P est un élément du noyau de δ , alors $P(X) = P(X - 1)$. On en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n) = P(n - 1)$ donc $P(n) = P(0)$, donc le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines, donc il est nul, et P est constant. Réciproquement, tout polynôme constant est dans le noyau de δ , donc

$$\text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X],$$

et δ n'est pas injectif puisque son noyau n'est pas réduit à 0.

3. On a alors $\text{Ker}(\delta_n) = \text{Ker}(\delta) \cap \mathbb{R}_n[X] = \text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$, donc δ_n n'est pas injective.
4. Soit P est un polynôme de degré $\leq n$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ et Q est un polynôme de degré $\leq n - 1$ tels que $P = aX^n + Q$. Alors

$$\delta_n(P) = P - P(X - 1) = aX^n + Q - a(X - 1)^n + Q(X - 1) = Q + Q(X - 1) - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i X^i \in \mathbb{R}_{n-1}[X],$$

donc $\text{Im}(\delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

5. D'après le théorème du rang, on a $\text{rang}(\delta_n) = \dim(E_n) - \dim(\text{Ker}(\delta_n)) = n + 1 - 1 = n$.
6. On a $\text{Im}(\delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et ces deux espaces ont même dimension, donc

$$\text{Im}(\delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Montrons que δ est surjective, *i.e.* que $\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $d \in \mathbb{N}$ son degré. Alors

$$P \in E_d = \text{Im}(\delta_{d+1}),$$

donc il existe $Q \in E_{d+1}[X]$ tel que $\delta_{d+1}(Q) = P$ puisque δ_{d+1} est surjective. Or, $\delta_{d+1}(Q) = \delta(Q)$, donc P est dans l'image de δ qui est bien surjectif.

7. L'endomorphisme δ^2 est surjectif car δ l'est et la composée de deux endomorphismes surjectifs est surjective.

On a $\text{Ker}(\delta) \subset \text{Ker}(\delta^2)$. En effet, si $P \in \text{Ker}(\delta)$, alors

$$\delta^2(P) = \delta(0) = 0,$$

donc $P \in \text{Ker}(\delta)$, et δ n'est pas injectif.

8. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\delta^2(P) = P(X) + P(X - 2) - 2P(X - 1).$$

Or, on vient de montrer que δ^2 est surjective, donc il existe $P \in E$ tel que

$$Q = \delta(P) = P + P(X - 2) - 2P(X - 1).$$

Par contre, celui-ci n'est pas unique puisque $\text{Ker}(\delta) \subset \text{Ker}(\delta^2)$ donc si $\lambda \in \mathbb{R}_0[X]$ et $P \in E$ est tel que $Q = \delta(P)$, alors

$$\delta^2(P + \lambda) = Q.$$

Partie 2

1. Bien entendu $F \neq \emptyset$ puisque $0 \in F$. De plus, si $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0,$$

et $\lambda P + Q \in F$.

2. Soit $P \in \text{Ker}(\delta) \cap F$. Alors P est un polynôme constant nul en 0 : il est donc nul et $\text{Ker}(\delta) \cap F = \{0\}$.

Soit maintenant P un polynôme quelconque. Alors $P = a_0 + XQ$ où $a_0 \in \mathbb{R}$ est le terme constant de P et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Or, $a_0 \in \text{Ker}(\delta)$ et $XQ \in F$, donc $\mathbb{R}[X] = \text{Ker}(\delta) + F$, et finalement

$$E = \text{Ker}(\delta) \oplus F.$$

3. Le noyau de cette restriction est $F \cap \text{Ker}(\delta) = \{0\}$, donc $\delta|_F$ est injective.

Montrons la surjectivité. Si Q est un polynôme, il admet au moins un antécédent P par δ . Alors $P(0)$ est dans le noyau de δ et donc

$$\delta(P - P(0)) = \delta(P) - \delta(P(0)) = \delta(P) = Q,$$

et $P - P(0) \in F$, donc Q admet un antécédent dans F , et la restriction est bien surjective.

Partie 3

1. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a $\deg(A_k) = k$, donc c'est une famille libre (car de degrés deux à deux distincts) de $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes, donc une base.
2. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Si $k = 0$, alors $\delta(A_k) = 0$. Sinon, on a

$$\begin{aligned} \delta(A_k) &= A_k - A_k(X - 1) = X(X + 1) \cdots (X + k - 1) - (X - 1)X \cdots (X + k - 2) \\ &= X(X + 1) \cdots (X + k - 2)(X + k - 1 - (X - 1)) = kA_{k-1}. \end{aligned}$$

3. Soit $P \in E_n$, et (a_0, \dots, a_n) ses composantes dans la base des A_k . Alors

$$P = \sum_{k=0}^n a_k A_k.$$

Or, comme $\delta(A_k) = kA_{k-1}$ pour $k \geq 1$, une récurrence facile montre que si $j \leq k$,

$$\delta^j(A_k) = k(k-1) \cdots (k-j+1)A_{k-j},$$

et que si $j > k$,

$$\delta^j(A_k) = 0.$$

On en déduit que

$$\delta^j(P) = \sum_{k=j}^n a_k k(k-1) \cdots (k-j+1)A_{k-j}.$$

Or, $A_{k-j}(0) = 0$ si $k > j$ et $A_0(0) = 1$, donc

$$\delta^j(P)(0) = j!a_j.$$

4. Dans cette question, on prend $n = 4$. Soit $P \in E_3$ et (a_0, a_1, a_2, a_3) ses composantes dans la base (A_0, A_1, A_2, A_3) . On a

$$\begin{aligned} a_0 &= P(0) = 1, & a_1 &= \delta(P)(0) = P(0) - P(-1) = 1, \\ a_2 &= \frac{\delta^2(P)(0)}{2!} = \frac{P(0) - 2P(-1) + P(-2)}{2} = 3, \\ a_3 &= \frac{\delta^3(P)(0)}{3!} = \frac{P(0) - 3P(-1) + 3P(-2) - P(-3)}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

et l'unique solution est

$$P = 1 + X + 3X(X + 1) + \frac{7}{3}X(X + 1)(X + 2) = \boxed{\frac{7}{3}X^3 + 10X^2 + \frac{26}{3}X + 1}.$$

Partie 4

- Comme $X^k \in E_k \subset E_{n-1} = \text{Im}(\delta_n)$, il existe un polynôme $Q_k \in E_n$ tel que $\delta_n(Q_k) = X^k$, et le polynôme $P_k = Q_k - Q_k(0)$ répond à la question. De plus, si T_k vérifie les mêmes propriétés que P_k , alors $P_k - T_k$ est dans le noyau de δ_n , donc est constant, donc nul vu les valeurs en 0.
- On a $\delta_n(P_k)(0) = 0^k = 0$ car $k \geq 1$. Or, $\delta_n(P_k) = P_k - P_k(X - 1)$ qui, évalué en 0, donne $P_k(0) - P_k(-1) = P_k(-1)$ donc $P_k(-1) = 0$ et $X + 1$ divise P_k .
- On a pour tout $q = 1, \dots, n$,

$$q^k = \delta(P_k)(q) = P_k(q) - P_k(q - 1),$$

et en sommant ces égalités pour q allant de 1 à n , on obtient

$$\sum_{q=1}^n q^k = \sum_{q=1}^n (P_k(q) - P_k(q - 1)) = P_k(n)$$

car $P_k(0) = 0$.

4. On a

$$\delta(P'_k) = P'_k - P'_k(X - 1) = (P_k - P_k(X - 1))' = \delta(P_k)' = kX^{k-1} = k\delta(P_{k-1}).$$

On en déduit que

$$\delta\left(\frac{P'_k - P'_k(0)}{k}\right) = \delta\left(\frac{P'_k}{k}\right) = X^{k-1}$$

donc $(P'_k - P'_k(0))/k$ est un antécédent de X^{k-1} par δ et vaut 0 en 0, donc par unicité il est égal à P_{k-1} .

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant les fonctions polynomiales, on a

$$P_k(x) = \int_0^x P'_k(t) dt = \int_0^x (kP_{k-1}(t) + P'_k(0)) dt = kR_{k-1}(x) + xP'_k(0).$$

Avec $x = 1$, on obtient

$$P_k(1) = kR_{k-1}(1) + P'_k(0).$$

Or, $P_k(1) = 1$ d'après la question 18, donc

$$P_k(x) = kR_{k-1}(x) + xP'_k(0) = kR_{k-1}(x) + x(1 - kR_{k-1}(1)).$$

Cette relation étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle est vraie pour les polynômes.

6. Pour calculer ces polynômes, on calcule successivement $P_0, R_0, P_1, R_1, \dots, R_3, P_4$ à l'aide de 20, car $P_0 = X$. On obtient alors

$$\sum_{q=1}^n q = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{q=1}^n q^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{q=1}^n q^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \sum_{q=1}^n q^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Problème : extensions de corps et nombres algébriques

Partie 1 : premiers exemples

1. (a) $(1, i)$ est une \mathbb{R} -base de \mathbb{C} , donc \mathbb{C} est une extension finie de \mathbb{R} et $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.
 - (b) Soit L un corps tel que $\mathbb{R} \subset L \subset \mathbb{C}$. C'est donc un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , donc sa dimension est 1 ou 2. Si c'est 1, $L = \mathbb{R}$, sinon, $L = \mathbb{C}$.
 2. On montre que $(1, \sqrt{2})$ est une \mathbb{Q} -base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Par définition, c'est une famille génératrice. Or, elle est libre (fait en td), donc c'est une base, donc $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est une extension finie de \mathbb{Q} et $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.
 3. (a)
 - i. On effectue la division euclidienne de $X^3 - 2$ par P . Comme ce sont des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$, il existe $A, R \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $X^3 - 2 = AP + R$, avec $\deg(R) \leq 1$. Mais alors $R(\sqrt[3]{2}) = 0$, donc $R = 0$ car $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ et $R \in \mathbb{Q}_1[X]$.
 - ii. Mais $X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X - j\sqrt[3]{2})(X - j^2\sqrt[3]{2})$ qui est un produit d'irréductibles, donc P est un produit d'au plus deux de ces polynômes irréductibles, et $P \notin \mathbb{Q}[X]$: contradiction.
 - (b) Montrons que $(1, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2)$ est une \mathbb{Q} -base de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Par définition, elle est génératrice. Soient alors $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tels que $a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 = 0$. Alors $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{Q}[X]$ admet $\sqrt[3]{2}$ pour racine, donc $P = 0$, et $a = b = c = 0$: la famille est libre, c'est bien une \mathbb{Q} -base, et $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est une extension finie de \mathbb{Q} , et $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.
4. Soit $v \in L$. Il existe $(v_1, \dots, v_p) \in K^p$ tel que $v = \sum_{j=1}^p v_j \beta_j$. Or, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une k base de K , donc

pour tout $j = 1, \dots, p$, il existe $\lambda_{ij} \in k$ tel que $v_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \alpha_i$, et donc

$$v = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \alpha_i \right) \beta_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} \alpha_i \beta_j,$$

donc la famille $(\alpha_i \beta_j)_{i,j}$ est génératrice du k -espace vectoriel L .

Considérons alors une famille $(\lambda_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ d'éléments de k tels que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} \alpha_i \beta_j = 0$. On a alors

$$\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \alpha_i \right) \beta_j = 0.$$

Or, $\lambda_{ij} \in k$, $\alpha_i \in K$, donc $\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \alpha_i \in K$, et $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ est K -libre, donc :

$$\forall j = 1, \dots, p, \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \alpha_i = 0.$$

Mais $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est k -libre, donc pour tous i, j , $\lambda_{ij} = 0$, et la famille $(\alpha_i \beta_j)$ est k -libre : c'est une k -base de L , qui est donc une extension finie de k , de dimension np .

Partie 2 : éléments algébriques

Dans cette partie, on fixe $K \subset L$ deux corps. Pour $a \in L$, on note $K[a] = \text{vect}_K(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ le sous K -espace vectoriel du K -espace vectoriel L engendré par la famille $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

L'élément a est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X]$, non nul, tel que $P(a) = 0$.

1. Par définition de $K[a]$, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients dans K des puissances de a , donc l'ensemble $P(a)$ où $P \in K[X]$.

Or, si $P, Q \in K[X]$, alors $P(a)Q(a) = (PQ)(a) \in K[a]$, qui est donc bien un sous-anneau de L .

Enfin, si A est un sous-anneau de L contenant K et a , par stabilité par produit, il contient toutes les puissances de a , et tous les produits d'éléments de K par une puissance de a , et par stabilité par somme, toutes les combinaisons linéaires à coefficients dans K des puissances de a , *i.e.* $K[a]$.

2. Par définition, on a

$$\begin{aligned} a \text{ algébrique sur } K &\iff \exists P \in K[X], P \neq 0 \mid P(a) = 0 \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1}, \text{ non tous nuls} \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i a^i = 0 \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \mid (1, a, \dots, a^n) \text{ liée} \end{aligned}$$

3. Soit $a \in L$. Alors :

$$\begin{aligned} a \text{ est algébrique sur } K \text{ de degré } 1 &\iff \exists (\lambda, \mu) \in K^2, (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \mid \lambda + \mu a = 0 \\ &\stackrel{a \neq 0}{\iff} \exists (\lambda, \mu) \in K^2, \mu \neq 0 \mid \lambda + \mu a = 0 \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in K^2, \mu \neq 0 \mid a = \mu^{-1} \lambda \\ &\iff a \in K. \end{aligned}$$

4. Soit $a \in L$. Alors $K[a]$ est un sous K -espace vectoriel de L , et est donc de dimension finie. La famille $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc liée, et a est algébrique.

Soit alors d le degré de a . Alors $(1, a, \dots, a^{d-1})$ est une famille K -libre, donc $d \leq [L : K]$.

5. Soit $a \in L$ algébrique sur K de degré d .

- (a) Par définition de d , c'est une famille libre, et $a^d \in \text{vect}(1, a, \dots, a^{d-1})$: il existe $P \in K_{d-1}[X]$ tel que $a^d = P(a)$. Pour un $n \geq d$, on a alors

$$a^n = a^{n-d} P(a) \in \text{vect}(a^k)_{0 \leq k \leq n-1}.$$

Par récurrence, on a ainsi pour $n \geq d$, $\text{vect}(a^k)_{0 \leq k \leq n} \in \text{vect}(a^k)_{0 \leq k \leq d-1}$, ce qui prouve que la famille $(a^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une famille génératrice, donc une base de $K[a]$.

- (b) Déjà, f_b est bien définie car $K[a]$ est un sous-anneau de L . Puis, comme $K[a]$ est un K -espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer que f_b est linéaire et injective. Mais la linéarité découle de la distributivité et de la commutativité dans L . Enfin, si $x \in \text{Ker}(f_b)$, alors $bx = 0$, et comme $b \neq 0$, on a $x = 0$ (L est un corps), donc $\text{Ker}(f_b) = \{0\}$ et f_b est injective.
- (c) Pour montrer que $K[a]$ est un sous-corps de L , il reste à montrer que si $b \in K[a]$ et $b \neq 0$, alors $b^{-1} \in K[a]$. Or, $1 \in K[a]$, et f_b est un automorphisme de $K[a]$, donc $b^{-1} = f_b^{-1}(1) \in K[a]$.
- (d) D'après 5(a) et 5(c), $K[a]$ est une extension finie de K , et $\boxed{[K[a] : K] = \deg(a)}$.
- (e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ défini dans la partie 1 est en fait $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ comme défini ici. Or, $X^3 - 2$ est un polynôme à coefficients rationnels qui annule $\sqrt[3]{2}$, et donc $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ est un sous-corps de \mathbb{R} .
- (f) — i \Rightarrow ii : si $K[a]$ est un sous-corps de L , comme $a \neq 0$, $a^{-1} \in K[a]$.
 — ii \Rightarrow iii : Supposons que $a^{-1} \in K[a]$. Il existe donc $P \in K[X]$ tel que $a^{-1} = P(a)$, et donc $aP(a) - 1 = 0$, et $XP - 1 \in K[X]$ annule a , qui est donc algébrique.
 — iii \Rightarrow i : si a est algébrique sur K , par 5, $K[a]$ est un sous-corps de L .

Partie 3 : polynôme minimal d'un élément algébrique

1. Par définition de q , il existe $P \in I_a$ de degré q , et $\text{dom}(P)^{-1}P$ est unitaire, de degré q , et annule a .

Montrons l'unicité. Soient $P, Q \in I_a$, unitaires de degré q . Alors $(P - Q)(a) = P(a) - Q(a) = 0$ donc $P - Q \in I_a$. Or, $\deg(P - Q) < q$ (P, Q de même degré et de même coefficients dominants), donc par définition de q , $P - Q = 0$.

2. Supposons que $\mu_a = PQ$, avec $P, Q \in K[X]$. Alors $P(a)Q(a) = 0$, donc $P(a) = 0$ ou $Q(a) = 0$. Si par exemple $P(a) = 0$, alors $P \in I_a$. Mais $\deg(P) \leq q$, et $P \neq 0$ (car $\mu_a \neq 0$), donc par 1, $P \sim \mu_a$, et μ_a est irréductible dans $K[X]$.

Enfin, si $Q \in K[X]$, on a $(\mu_a Q)(a) = \mu_a(a)Q(a) = 0$ donc $\mu_a Q \in I_a$.

Réciproquement, si $P \in I_a$, en divisant P par μ_a , on a $P = \mu_a Q + R$, où $P, Q \in K[X]$, et $\deg(R) < q$. Mais $R(a) = 0$, donc $R \in I_a$, et $R = 0$.

3. C'est en fait la définition du degré : le plus petit entier tel que $(1, a, \dots, a^d)$ est K -liée signifie le plus petit entier d tel qu'il existe un polynôme de degré d qui annule a : c'est le degré du polynôme minimal.
4. Montrons que c'est $\boxed{X^3 - 2}$. En effet, ce polynôme est unitaire et annule $\sqrt[3]{2}$. De plus, on a montré en partie 1, Q3(b), que $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = 3$, qui est aussi le degré du polynôme minimal. Par unicité, $X^3 - 2$ est bien le polynôme cherché.
5. Soit $P = (X - \sqrt{2})^2 - 3 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}][X]$. Alors $P(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$, donc $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, et $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]] = 2$. Mais $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 2$, donc par la partie 1, Q2, $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ est une extension finie de \mathbb{Q} et $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]] \times [\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 4$, donc $\boxed{\text{le degré du polynôme minimal est } 4}$.

Partie 4 : nombres algébriques

1. (a) Comme b est algébrique sur \mathbb{Q} , il l'est aussi sur $\mathbb{Q}[a]$, donc $\mathbb{Q}[a][b]$ est un corps, et est une extension finie de $\mathbb{Q}[a]$, et donc, comme $\mathbb{Q}[a]$ est une extension finie de \mathbb{Q} , par la partie 1, Q2, $\mathbb{Q}[a][b]$ est aussi une extension finie de \mathbb{Q} , et on a $[\mathbb{Q}[a, b], \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[a, b] : \mathbb{Q}[a]] \times [\mathbb{Q}[a], \mathbb{Q}]$.
- (b) Notons $L = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$. Comme $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ qui est un corps, on a $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, et donc par sommes et produits d'éléments du corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, $L \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

Réciproquement, tout élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$, et de leurs puissances, donc $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

2. Montrons que $\overline{\mathbb{Q}}$ est stable par somme, produit, et passage à l'inverse. Soient $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$. Or, par 1(a), $\mathbb{Q}[a, b]$ est un corps, donc $a^{-1}, a+b, ab \in \mathbb{Q}[a, b]$. On en déduit par la partie 2, Q1, que $\mathbb{Q}[a^{-1}] \subset \mathbb{Q}[a, b]$, $\mathbb{Q}[a+b] \subset \mathbb{Q}[a, b]$, $\mathbb{Q}[ab] \subset \mathbb{Q}[a, b]$.

Or, $\mathbb{Q}[a, b]$ est une extension finie de \mathbb{Q} par 1(a), donc $\mathbb{Q}[a^{-1}]$, $\mathbb{Q}[a+b]$ et $\mathbb{Q}[ab]$ également, et donc par la partie 2, $a^{-1}, a+b, ab \in \overline{\mathbb{Q}}$.