Variables aléatoires, analyse
DS7 - durée : 3h

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

1. Détérminez l'ensemble de définition de f, justifiez qu'elle est dérivable sur ce même ensemble, et calculez $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble.
2. Montrez que f est prolongeable par continuité en 0.
3. On suppose qu'on a prolongé f en 0. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2 :

Un lapin se déplace sur un axe gradué par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite.

On suppose que :

- il part de 0
- la probabilité qu'un bond soit de 1 unité est $1/2$
- la probabilité qu'un bond soit de 2 unités est $1/2$
- chaque bond est indépendant des précédents.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose X_n la variable aléatoire donnant la position du lapin après n sauts.

1. Soit S_n la variable aléatoire donnant le nombre de sauts de 2 unités effectués par le lapin au court des n premiers sauts.
   Déterminez la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Justifiez que $X_n = S_n + n$.
3. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } , \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Précisez l'ensemble de définition de f, et dressez le tableau variation de f, complété avec les limites aux bornes de l'ensemble.
2. Montrez que f est une bijection de $[e, +\infty[$ vers $[e, +\infty[$.
3. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$ (on rappelle que $e \simeq 2.7$)
4. Justifiez que f' est dérivable sur $[e, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f'' sur cet intervalle.
5. En déduire que pour tout $x \geq e$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
6. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$$
7. En déduire que $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$, et conclure que $\lim u_n = e$.

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On dispose d'une pièce donnant 'Pile' avec la probabilité p et 'Face' avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- si l'on a obtenu 'Pile'.
- si l'on a obtenu n fois 'Face'.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on a obtenu 'Pile' (respectivement 'Face') au k^{ieme} lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de 'Pile' obtenus et enfin Y_n le nombre de 'Face' obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé (Ω, P) que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Détermination de la loi de T_n :
   a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k=1$, $P(T_n = k)$.
   b) Déterminer $P(T_n = n)$.
   c) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
2. Détermination de la loi de X_n.
   a) Donner la loi de X_n.
   b) Déterminer l'espérance de X_n.
3. Détermination de la loi de Y_n.
   a) Déterminer, pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, $P(Y_n = k)$.
   b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
   c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n.
   d) On admet que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Calculez $E(Y_n)$.

Exercice 5 : exercice supplémentaire

Dans une population de r personnes ($r \in \mathbb{N}^*$), chaque individu fait appel à un médecin choisi au hasard dans une liste de n ($n \in \mathbb{N}^*$) médecins. On suppose que les choix se font tous de manière indépendante.

1. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire représentant le nombre de personnes qui vont consulter le $i$ème médecin.
   a) Déterminez la loi commune à toutes les variables aléatoires X_i.
   b) Préciser leur espérance et leur variance.
   c) Ces variables sont-elles indépendantes ?
   d) Pour $i \neq j$, déterminez la loi de $X_i + X_j$, son espérance et sa variance.
   e) En déduire $cov(X_i, X_j)$. (indication : rappelez vous de la formule concernant la variance qui ressemble à une identité remarquable...)
2. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, on pose Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si $(X_i = 0)$, 0 sinon. On pose $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   a) Que modélise la variable Z_n ?
   b) "Z_n est une somme de variable aléatoire de Bernoulli de même paramètre $P(X_i = 0)$. Donc Z_n est binomiale de paramètres n, p avec $p = P(X_i = 0)$." Ce raisonnement est-il valable ? Le compléter ou montrer que sa conclusion est fausse.
   c) Déterminez $E(Z_n)$.