

Variables aléatoires, analyse

DS7 - durée : 3h

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

1. Déterminez l'ensemble de définition de f , justifiez qu'elle est dérivable sur ce même ensemble, et calculez $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble.
 2. Montrez que f est prolongeable par continuité en 0.
 3. On suppose qu'on a prolongé f en 0. Est-elle dérivable en 0 ?
1. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 > 0$, f est définie sur \mathbb{R}^* , et est dérivable sur \mathbb{R}^* par composition et quotient de fonctions dérivables.

$$\text{On a alors } f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{2x}{1+x^2} x - \ln(1+x^2) \right) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

2. Le plus efficace est d'utiliser un équivalent. On peut aussi multiplier et diviser par x pour faire apparaître une limite usuelle.

Comme $x^2 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, on a $\ln(1+x^2) \sim x^2$ et donc $f(x) \sim \frac{x^2}{x^2}$ au voisinage de 0. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, et on peut prolonger par continuité en posant $f(0) = 1$.

3. On a prolongé f par continuité, donc f est continue en 0.

Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ Or, $\frac{2}{1+x^2} \rightarrow 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$ (par limite usuelle ou avec des équivalents).

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2 - 1 = 1$. et donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$

Exercice 2 :

Un lapin se déplace sur un axe gradué par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite.

On suppose que :

- ▶ il part de 0
- ▶ la probabilité qu'un bond soit de 1 unité est $1/2$
- ▶ la probabilité qu'un bond soit de 2 unités est $1/2$
- ▶ chaque bond est indépendant des précédents.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose X_n la variable aléatoire donnant la position du lapin après n sauts.

1. Soit S_n la variable aléatoire donnant le nombre de sauts de 2 unités effectués par le lapin au court des n premiers sauts. Déterminez la loi de S_n , son espérance et sa variance.
 2. Justifiez que $X_n = S_n + n$.
 3. En déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance.
1. On compte le nombre de sauts de deux unités : cela revient à une expérience de type schéma de Bernoulli, où un "succès" est un saut de deux unités, un "échec" un saut de d'une seule unité, avec indépendance entre les sauts successifs. Ainsi $S_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, son espérance est $\frac{n}{2}$ et sa variance $\frac{n}{4}$.
2. a) Le lapin avance de n cases, + le nombre de fois où il a sauté de 2 unités (c'est S_n), ce qui donne donc $X_n = n + S_n$.
- b) Le lapin saute au minimum d'une case, au maximum de 2. Si les n sauts se font d'une unité, il est à la position n , si tous se font de 2 unités, c'est la position $2n$ qui est atteinte. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, et donc $X_n(\Omega) = \llbracket n, 2n \rrbracket$.
La loi de X_n est donnée pour tout $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$ par

$$P(X_n = k) = P(S_n = k - n) = \binom{n}{k-n} \frac{1}{2^n}$$

- c) Pour l'espérance et la variance, on utilise simplement les propriétés vues dans le cours :
- $$E(X_n) = E(S_n + n) = E(S_n) + n = \frac{3n}{2} \text{ et } V(X_n) = V(S_n) = \frac{n}{4}$$



Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Et soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Précisez l'ensemble de définition de f , et dressez le tableau variation de f , complété avec les limites aux bornes de l'ensemble.
2. Montrez que f est une bijection de $[e, +\infty[$ vers $[e, +\infty[$.
3. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$ (on rappelle que $e \simeq 2.7$)
4. Justifiez que f' est dérivable sur $[e, +\infty[$ et dressez le tableau de variation de f' sur cet intervalle.
5. En déduire que pour tout $x \geq e$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
6. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$$

7. En déduire que $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$, et conclure que $\lim u_n = e$.

1. il faut que $\ln(x)$ existe et soit non nul, donc f est défini sur $D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
Par quotient de fonctions dérivables sur D , f est dérivable sur D avec

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln x)^2}$$

Ainsi, f' est du signe de $\ln(x) - 1$.

Pour les limites : en 0, on n'a pas de forme indéterminée et la limite est nulle.

En $+\infty$, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

en 1^- , $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

En 1^+ , on a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

On a tous les éléments pour tracer le tableau de variation.

2. f est strictement croissante sur $[e, +\infty[$ donc constitue une bijection de $[e, +\infty[$ dans $f([e, +\infty[)$.
Comme f est continue, l'image est l'intervalle obtenu par les limites aux bornes, c'est à dire $f([e, +\infty[) = [e, +\infty[$.
3. On le fait par récurrence. On a $u_0 = 3 \geq e$, donc c'est initialisé.
Soit $n \geq 0$. On suppose que $u_n \geq e$.
Comme f est croissante sur $[e, +\infty[$, on a $f(u_n) \geq f(e)$ d'où $u_{n+1} \geq e$
4. f' est dérivable par quotient de fonction qui le sont, et on obtient

$$f''(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x \ln(x)}$$

Comme $x \geq e$, $x \ln(x) > 0$ et $f''(x)$ est du signe de $2 - \ln(x)$.

f' est donc croissante sur $[e, e^2]$, puis décroissante sur $[e^2, +\infty[$.

5. D'après les variations précédente, f' admet un maximum en e^2 avec $f'(e^2) = \frac{1}{4}$

on a donc $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$, d'où $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

6. l'inégalité des accroissements finis, applicable parce que f est dérivable sur $[e, +\infty[$, donne

$$\forall x, y \in [e, +\infty[, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{4}|y - x|$$

Comme $u_n \in [e, +\infty[$ pour tout n , on peut prendre $y = u_n$ et $x = e$ dans l'inégalité précédente pour écrire

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$$

7. A nouveau par récurrence. Le seul point un peu délicat est l'initialisation, et c'est pour cela que $e \simeq 2,7$ a été rappelé :

$$|u_0 - e| \simeq 0.3 \leq 1 = \frac{1}{4^0}$$

Le reste est immédiat (et doit être rédigé sur la copie bien sûr)

On conclut par le théorème d'encadrement que $\lim u_n = e$.

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant 'Pile' avec la probabilité p et 'Face' avec la probabilité q .
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- ▶ si l'on a obtenu 'Pile'.
- ▶ si l'on a obtenu n fois 'Face'.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on a obtenu 'Pile' (respectivement 'Face') au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de 'Pile' obtenus et enfin Y_n le nombre de 'Face' obtenus. On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé (Ω, P) que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. DÉTERMINATION DE LA LOI DE T_n :
 - a) Pour tout k de $[[1, n - 1]]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, $P(T_n = k)$.
 - b) Déterminer $P(T_n = n)$.
 - c) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1$.
2. DÉTERMINATION DE LA LOI DE X_n .
 - a) Donner la loi de X_n .
 - b) Déterminer l'espérance de X_n .
3. DÉTERMINATION DE LA LOI DE Y_n .
 - a) Déterminer, pour tout k de $[[1, n - 1]]$, $P(Y_n = k)$.
 - b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
 - c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n .
 - d) On admet que $E(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Calculez $E(Y_n)$.

C'est presque exactement l'exercice des clefs...

1. a) Remarquons déjà que $(T = 1)$ est simplement l'événement P_1 .

Ainsi, $P(T = 1) = p$.

Pour $k \in [[2, n - 1]]$, $(T = k)$ signifie qu'on a obtenu $k - 1$ face, puis pile, c'est à dire

$$P(T = k) = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

donc par la formule des probabilités composées, et en utilisant le fait que la probabilité d'avoir face ne change pas, on a

$$P(T = k) = (1 - p)^{k-1} p = q^{k-1} p$$

- b) $(T_n = n)$ regroupe deux situations : on a eu que des faces pendant les n lancer, ou alors on a eu $n - 1$ faces et le dernier est un pile.

Ainsi, $(T_n = n) = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap (F_n \cup P_n)$. Le dernier événement de cet intersection de probabilité 1 sachant les précédents, et donc on a

$$P(T_n = n) = q^{n-1}$$

- c) C'est une vérification, en utilisant le fait que $p = 1 - q$ pour la simplification à la fin :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(T_n = k) &= \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} p + q^{n-1} \\ &= p \sum_{k=0}^{n-2} q^k + q^{n-1} \\ &= (1 - q) \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + q^{n-1} \\ &= 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1 \end{aligned}$$

2. a) X_n est le nombre de pile obtenus, donc il n'y a que deux valeurs possibles 0 ou 1.

Ainsi, X_n suit une loi de Bernoulli.

Comme $(X_n = 0) = F_1 \cap F_2 \dots \cap F_n$ on a $P(X_n = 0) = q^n$, d'où $P(X_n = 1) = 1 - q^n$ et donc

$$X_n \sim \mathcal{B}(1 - q^n)$$

- b) C'est une loi de Bernoulli, donc l'espérance égale le paramètre, c'est à dire

$$E(X_n) = 1 - q^n$$

3. a) Pour $k < n$, on a obtenu k faces en tout si on a eu k fois face, puis un pile, c'est à dire :
 $(Y_n = k) = F_1 \cap F_2 \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$ d'où

$$P(Y_n = k) = q^k p$$

b) L'événement $(Y_n = n)$ est simplement $F_1 \cap F_2 \dots \cap F_n$, d'où

$$P(Y_n = n) = q^n$$

c) Le nombre total de lancer est le nombre de face + le lancer qui a donné pile, dans le cas où un pile interrompt la série, ou alors c'est la situation où on a eu n face et 0 pile.

Dans tous les cas, $T_n = X_n + Y_n$.

d) Par linéarité de l'espérance $E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q} - (1 - q^n)$

En mettant au même dénominateur, il vient enfin :

$$E(X) = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exercice 5 : exercice supplémentaire

Dans une population de r personnes ($r \in \mathbb{N}^*$), chaque individu fait appel à un médecin choisi au hasard dans une liste de n ($n \in \mathbb{N}^*$) médecins. On suppose que les choix se font tous de manière indépendante.

1. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire représentant le nombre de personnes qui vont consulter le i ème médecin.

- Déterminez la loi commune à toutes les variables aléatoires X_i .
- Préciser leur espérance et leur variance.
- Ces variables sont-elles indépendantes ?
- Pour $i \neq j$, déterminez la loi de $X_i + X_j$, son espérance et sa variance.
- En déduire $cov(X_i, X_j)$. (indication : rappelez vous de la formule concernant la variance qui ressemble à une identité remarquable...)

2. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, on pose Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si $(X_i = 0)$, 0 sinon. On pose $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

- Que modélise la variable Z_n ?
- " Z_n est une somme de variable aléatoire de Bernoulli de même paramètre $P(X_i = 0)$. Donc Z_n est binomiale de paramètres n, p avec $p = P(X_i = 0)$." Ce raisonnement est-il valable ? Le compléter ou montrer que sa conclusion est fautive.
- Déterminez $E(Z_n)$.

1. a) Chaque personne peut faire appel ou non au medecin numero i avec une probabilité de $\frac{1}{n}$: c'est un comptage de succès dans la répétition de r épreuves succès/echec, de manière

indépendante, et donc $X_i \sim \mathcal{B}(r, \frac{1}{n})$.

b) C'est le cours : $E(X_i) = \frac{r}{n}$ et $V(X_i) = \frac{r(n-1)}{n^2}$

c) Il n'y a pas indépendance, car deux medecins différents ne peuvent pas avoir simultanément n patients : ainsi $(X_i = n) \cap (X_j = n) = \emptyset$ alors que $P(X_i = n) \neq 0$ et $P(X_j = n) \neq 0$.

d) C'est le même raisonnement que la question a), en regroupant les deux medecins : la probabilité d'un succès est désormais $\frac{2}{n}$.

$$X_i + X_j \sim \mathcal{B}(r, \frac{2}{n})$$

Ainsi, $E(X_i + X_j) = \frac{2r}{n}$ et $V(X_i + X_j) = \frac{2r(n-2)}{n^2}$

e) On a $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2cov(X_i, X_j)$ On en déduit

$$cov(X_i, X_j) = \frac{1}{2}(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)) = -\frac{r}{n^2}$$

2. a) Y_i vaut 1 si le medecin numero i n'a pas été consulté : Z_n représente ainsi le nombre de medecin non consultés.

b) Pour que ce raisonnement soit valable il faudrait qu'il y ait indépendance des X_i , ce qui n'est pas le cas. On peut totalement écarter la loi binomiale du fait que $(Z_n = n) = \emptyset$ (il ne peut y avoir aucun medecin consulté).

c) Déterminons la loi de Y_i : c'est une variable de Bernoulli et on a

$$P(Y_i = 1) = P(X_i = 0) = (1 - \frac{1}{n})^r.$$

Ainsi $E(Y_i) = (\frac{n-1}{n})^r$ et par linéarité de l'espérance

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^n E(Y_i) = n \left(\frac{n-1}{n} \right)^r$$