# Informatique – TP17

Vésale Nicolas - Henrik Thys

## Exercice 1: Calcul des éléments d'une suite.

On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$g_0 = 0, g_1 = g_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_{n+3} = g_n + g_{n+2}$$

1. Rappeler pourquoi il ne vaut mieux pas utiliser une fonction récursive pour calculer les éléments d'une telle suite.
2. Donner une fonction **itérative** `suite(n:int)->int` qui rend la valeur de $g_n$.
3. Prouver la correction de votre fonction.

## Exercice 3: Les fractions égyptiennes.

On appelle *fraction égyptienne* une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire qui ont des numérateurs égaux à 1 et des dénominateurs entiers supérieurs ou égaux à 2, ces dénominateurs étant deux-à-deux distincts.
Par exemple, $2/5$ est une fraction égyptienne puisqu'on peut écrire :

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \quad \text{, mais aussi} \quad \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Il est possible de démontrer que tout rationnel de l'intervalle $]0, 1[$ peut être représenté sous la forme d'une fraction égyptienne, et qu'il peut être décomposé d'une infinité de façons différentes.
Dans cet exercice, on choisit de représenter un nombre rationnel $p/q$ par un couple `(p, q)`, sans se préoccuper de caractère irréductible ou non de la représentation. Par exemple, le rationnel $2/5$ pourra tout aussi bien être représenté par le couple `(2, 5)` que par le couple `(6, 15)`.
La fraction égyptienne

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

sera représentée par la liste $[\texttt{a1}, \texttt{a2}, ..., \texttt{an}]$, en imposant en outre la condition $2 \leqslant \texttt{a1} < \texttt{a2} < \cdots < \texttt{an}$, condition qui assure que les dénominateurs sont deux-à-deux distincts. Là encore, il n'y a pas unicité de la représentation, puisque le rationnel $2/5$ peut aussi bien être représenté sous forme de fraction égyptienne par la liste $[\texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{30}]$ que par la liste $[\texttt{3}, \texttt{15}]$.

1. Rédiger une fonction `estEgyptienne(lst)` qui prend en argument une liste d'entiers naturels strictement positifs `lst` et qui renvoie le booléen `True` lorsque `lst` représente une fraction égyptienne et `False` sinon.

   Par exemple, `estEgyptienne([2, 3, 3, 5])` et `estEgyptienne([1, 3, 7, 8])` renverront dans les deux cas le booléen `False` puisque la première liste n'est pas strictement croissante et la seconde débute par 1.

2. Rédiger une fonction `rationnel(lst)` qui prend en argument une liste `lst` supposée représenter une fraction égyptienne et qui renvoie un couple `(p, q)` représentant le rationnel décrit par cette fraction égyptienne.

   Par exemple, `rationnel([5, 6, 30])` pourra tout aussi bien renvoyer le couple `(2, 5)` que `(6, 15)`.

3. On considère la fonction:

```python
def fractionEgyptienne(p:int, q:int)->int:
    '''Renvoie une fraction égyptienne
    du rationnel p/q avec p<q'''
    a = p
    b = q
    lst = []
    while b % a != 0:
        m = b // a + 1
        lst.append(m)
        a = a * m - b
        b = b * m
    lst.append(b // a)
    return lst
```

4. Montrer que les valeurs successives prises par la variable `a` forment un variant de boucle. En déduire la terminaison de la fonction.

5. Montrer que pour tout $i$, $\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{1}{m_{i+1}}$. En déduire que

$$\frac{a_i}{b_i} + \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{m_k}$$

   est un invariant de boucle et la correction de la fonction.