

# Chapitre 29

## Construction d'une intégrale

Dans ce chapitre, on fixe deux réels  $a < b$ , et on note  $I = [a, b]$ .

### 1 Continuité uniforme

#### Définition 1.1 (Continuité uniforme)

Une fonction  $f$  est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathcal{D}_f, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

#### Proposition 1.2

1. Une fonction uniformément continue est continue.
2. Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

#### Théorème 1.3 (Heine)

Une fonction continue sur un segment  $y$  est uniformément continue.

### 2 Fonctions continues par morceaux

#### Définition 2.1 (Subdivision d'un segment)

1. Une *subdivision* de  $I$  est une suite finie  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .
2. Le *pas* de la subdivision est le réel  $\delta(\sigma) = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$ .
3. La subdivision est à *pas constant* si

$$\forall i = 1, \dots, n-1, x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1},$$

et dans ce cas on a

$$\forall i = 1, \dots, n-1, x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + i \frac{b-a}{n}.$$

**Définition 2.2 (Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux)**

1. Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est *en escalier* sur  $I$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $I$  telle que  $f_{]x_{i-1}, x_i[}$  soit constante pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
2. Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est *continue par morceaux* sur  $I$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $I$  telle que  $f_{]x_{i-1}, x_i[}$  soit continue pour tout  $i = 1, \dots, n$ , et telle que  $f$  admette des limites finies à gauche et à droite en tout  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

**Proposition 2.3**

1. Une fonction en escalier est continue par morceaux.
2. Une fonction continue est continue par morceaux.

**Proposition 2.4**

Les ensembles  $\mathcal{E}(I)$  et  $\mathcal{CPM}(I)$  sont des sous-espaces vectoriels et des sous-anneaux de  $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ .

**Proposition 2.5**

Une fonction continue par morceaux sur  $I$  est bornée.

**Théorème 2.6 (Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ , et  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  en escalier sur  $I$  telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

### 3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

**Définition 3.1 (Intégrale des fonctions en escalier)**

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $I$ . On définit son intégrale sur  $I$  par

$$\int_I f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

où  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  est une subdivision quelconque subordonnée à  $f$ .

**Proposition 3.2**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ . Alors

$$\sup \left\{ \int_I \varphi, \varphi \in \mathcal{E}(I), \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_I \psi, \psi \in \mathcal{E}(I), \psi \geq f \right\}.$$

**Définition 3.3 (Intégrale des fonctions continues par morceaux)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ . On définit l'intégrale de  $f$  sur  $I$  par

$$\int_I f = \sup \left\{ \int_I \varphi, \varphi \in \mathcal{E}(I), \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_I \psi, \psi \in \mathcal{E}(I), \psi \geq f \right\}.$$

**Définition 3.4**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ , et  $c, d \in I$ . On définit :

$$\int_c^d f(t)dt = \begin{cases} \int_{[c,d]} f & \text{si } c < d \\ 0 & \text{si } c = d \\ -\int_{[d,c]} f & \text{si } d < c. \end{cases}$$

**Proposition 3.5 (Linéarité)**

Soient  $f, g$  des fonctions continues par morceaux sur  $I$ , et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g,$$

*i.e.* l'intégrale est une forme linéaire sur  $\mathcal{CPM}(I)$ .

**Proposition 3.6 (Positivité et croissance de l'intégrale)**

Soient  $f, g$  des fonctions continues par morceaux sur  $I$ ,  $a, b \in I$  avec  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ . Alors

1. Si  $f \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$  (**positivité**)
2. Si  $f \geq g$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$  (**croissance**).

**Proposition 3.7 (Inégalité triangulaire intégrale)**

Soient  $f \in \mathcal{CPM}(I)$ ,  $a, b \in I$  tels que  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ , alors  $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ .

**Proposition 3.8 (Relation de Chasles)**

Soit  $f \in \mathcal{CPM}(I)$  et  $c, d, e \in I$ . Alors  $\int_c^d f(t)dt = \int_c^e f(t)dt + \int_e^d f(t)dt$ .

**Proposition 3.9 (Intégrale des fonctions paires et impaires)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un segment  $[-a, a]$  ( $a \in \mathbb{R}_+$ ).

1. Si  $f$  est paire,  $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$ .
2. Si  $f$  est impaire,  $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ .

**Proposition 3.10 (Intégrale des fonctions périodiques)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $[a, +\infty[$ , et  $T$ -périodique ( $T > 0$ ). Alors

$$\forall b \geq a, \int_b^{b+T} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

## 4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

### Théorème 4.1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit  $f$  une fonction **continue** sur  $I$ , et  $x_0 \in I$ . La fonction  $F$  définie sur  $I$  par

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est la primitive de  $f$  s'annulant en  $x_0$ .

### Corollaire 4.2

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I)$ . Pour tous  $x_0, x \in I$ , on a  $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$ .

### Théorème 4.3

Soit  $f$  une fonction **continue et de signe constant** sur  $I$ . Alors

$$f = 0 \iff \int_a^b f(t) dt = 0.$$

### Corollaire 4.4

Soit  $f$  une fonction continue, positive, non nulle sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ). Alors  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

### Définition 4.5 (Sommes de Riemann)

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ ),  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les sommes

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right), \quad R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

sont des sommes de Riemann associées à  $f$  sur  $[a, b]$ .

### Proposition 4.6 (Sommes de Riemann)

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ ),  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt, \quad R'_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

## 5 Formules de Taylor

Dans ce paragraphe, nous voyons des formules qui permettent d'approcher des fonctions par des fonctions polynomiales.

### Théorème 5.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$ . Alors pour tous  $a, b \in I$ , on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du.$$

C'est la *formule de Taylor avec reste intégral* à l'ordre  $n$  entre  $a$  et  $b$ , ou encore *formule de Taylor avec reste intégral en  $a$*  si on ne veut pas préciser  $b$ .

**Corollaire 5.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  et  $a, b \in I$ . Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{u \in [a,b]} |f^{(n+1)}(u)|.$$