

# Chapitre 29

## Construction d'une intégrale

Dans ce chapitre, on fixe deux réels  $a < b$ , et on note  $I = [a, b]$ .

### 1 Continuité uniforme

#### Définition 1.1 (Continuité uniforme)

Une fonction  $f$  est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathcal{D}_f, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

#### Remarque.

Attention à ne pas confondre avec la continuité simple. Le " $\eta$ " est ici indépendant des points  $x$  et  $y$ . Pour  $f$ , cela signifie que, où que vous vous placiez dans son domaine de définition, si  $x$  varie au plus de  $\eta$ ,  $f(x)$  variera au plus de  $\varepsilon$ . Pour une fonction qui n'est que continue, le  $\eta$  va dépendre de  $x$ , donc de l'endroit où on se place dans le domaine de définition.

#### Proposition 1.2

1. Une fonction uniformément continue est continue.
2. Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

#### Démonstration.

1. Supposons  $f$  uniformément continue sur un intervalle  $I$ , et soit  $x_0 \in I$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe donc  $\eta > 0$  tels que pour tous  $x, y \in I$ , on ait

$$|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

En particulier pour  $y = x_0$ , on a pour tout  $x \in I$  tel que  $|x - x_0| \leq \eta$ ,  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$  :  $f$  est continue en  $x_0$ .

Remarquez que le  $\eta$  ne dépend pas de  $x_0$ .

2. Soit  $f$  une fonction  $k$ -lipschitzienne sur un intervalle  $I$ , et  $\varepsilon > 0$  fixé. Posons

$$\eta = \frac{\varepsilon}{k+1}.$$

Alors pour tous  $x, y \in I$  tels que  $|x - y| < \eta$ , on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < \varepsilon,$$

donc  $f$  est uniformément continue.

La proposition est démontrée. ■

### Exemples.

1. La fonction  $x \mapsto x^2$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ . En effet, elle y est  $2 \max(|a|, |b|)$ -lipschitzienne. En effet, si  $x, y \in [a, b]$ , on a

$$|x^2 - y^2| = |x + y| \times |x - y| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2 \max(|a|, |b|) \times |x - y|.$$

Par contre, elle n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . En effet, si elle l'était, il existerait par exemple  $\eta > 0$  tel que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $|x - y| \leq \eta$ , on ait  $|x^2 - y^2| \leq 1$  (on a pris  $\varepsilon = 1$  dans la définition. Notez que " $\eta$ " ne dépend pas de  $x$  et  $y$ ). Fixons  $x \in \mathbb{R}$ , et soit  $y = x + \eta$ . On a donc  $|x - y| = \eta$ , mais

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \times |x + y| = \eta \times (2x + \eta)$$

qui tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Pour  $x$  assez grand, on aura donc  $|x^2 - y^2| > 1$ , bien que  $|x - y| \leq \eta$  : contradiction, et la fonction carré n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. La fonction sinus est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  : elle est 1-lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis, puisque  $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ .

3. La fonction racine carrée est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$  (cf. td), bien qu'elle ne soit pas lipschitzienne sur  $\mathbb{R}_+$ , ni sur  $\mathbb{R}_+^*$  d'ailleurs, cf. le chapitre dérivation.

### Théorème 1.3 (Heine)

Une fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

### Démonstration.

**(Facultative)** Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $I$ . On raisonne par l'absurde, et on suppose que  $f$  n'est pas uniformément continue, *i.e.* on suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall \eta > 0, \exists x, y \in I, |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe alors  $x_n, y_n \in I$  tels que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

(on prend  $\eta = \frac{1}{n+1}$ ). Or, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est réelle et bornée, donc admet une sous-suite convergente  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  (théorème de Bolzano-Weierstrass), dont la limite  $a$  est dans  $I$  (puisque  $I$  est un segment).

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$|x_{k_n} - y_{k_n}| \leq \frac{1}{n+1},$$

donc la suite  $(y_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge également vers  $a$ .

Mais  $f$  est continue, donc la suite  $(|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})|)$  converge vers  $|f(a) - f(a)| = 0$ , ce qui est une contradiction puisque pour tout  $n$ , on a  $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$ . ■

## 2 Fonctions continues par morceaux

### Définition 2.1 (Subdivision d'un segment)

1. Une *subdivision* de  $I$  est une suite finie  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .
2. Le *pas* de la subdivision est le réel  $\delta(\sigma) = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$ .
3. La subdivision est à *pas constant* si

$$\forall i = 1, \dots, n-1, x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1},$$

et dans ce cas on a

$$\forall i = 1, \dots, n-1, x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + i \frac{b-a}{n}.$$

### Exemple.

Si  $I = [-1, 2]$ , les suites

$$\left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right) \quad \text{et} \quad \left(-1, -\frac{1}{2}, 2\right)$$

sont des subdivisions de  $I$ , la première étant à pas constant et contenant la deuxième.

### Remarque.

Une subdivision de  $I$  s'identifie à un unique sous-ensemble fini de  $I$  contenant  $a$  et  $b$ , et réciproquement tout sous-ensemble fini de  $I$  contenant  $a$  et  $b$  définit une unique subdivision de  $I$  (il suffit classer les éléments de l'ensemble par ordre croissant). Cela permet d'écrire qu'une subdivision est incluse dans une autre, de faire l'union de deux subdivisions.

### Définition 2.2 (Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux)

1. Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est *en escalier* sur  $I$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $I$  telle que  $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$  soit constante pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
2. Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est *continue par morceaux* sur  $I$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $I$  telle que  $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$  soit continue pour tout  $i = 1, \dots, n$ , et telle que  $f$  admette des limites finies à gauche et à droite en tout  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

### Remarques.

1. On note  $\mathcal{E}(I)$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $I$ .
2. On note  $\mathcal{CPM}(I)$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $I$ .

3. Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est *continue par morceaux* sur  $I$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $I$  telle que pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $f$  est la restriction à  $]x_{i-1}, x_i[$  d'une fonction continue sur  $[x_{i-1}, x_i]$ .
4. Les subdivisions de la définition sont dites *subordonnées* (ou *adaptées*) à  $f$ .
5. Il y a une infinité de subdivision subordonnée à une fonction en escalier (ou continue par morceaux). En particulier, si  $\sigma$  en est une, toute subdivision  $\sigma'$  telle que  $\sigma \subset \sigma'$  en est une également.
6. La valeur de la fonction en  $x_0, \dots, x_n$  n'a pas d'importance.
7. Une fonction en escalier est continue par morceaux.
8. Attention, pour être continue par morceaux, il faut des limites finies à droite et à gauche aux points de la subdivision !

### Exemples.

1. La fonction partie entière est en escalier sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .
2. La fonction  $f$  définie sur  $[-\pi, \pi]$  par

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x) & \text{si } x \neq \pm \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux. Il n'y a pas de limite finie en  $\pm\pi/2$ .

### Proposition 2.3

1. Une fonction en escalier est continue par morceaux.
2. Une fonction continue est continue par morceaux.

### Proposition 2.4

Les ensembles  $\mathcal{E}(I)$  et  $\mathcal{CPM}(I)$  sont des sous-espaces vectoriels et des sous-anneaux de  $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ .

### Démonstration.

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $I$ , et  $\sigma_f, \sigma_g$  des subdivisions de  $I$ , l'une adaptée à  $f$ , l'autre à  $g$ . Soit  $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g$ . C'est une subdivision adaptée à la fois à  $f$  et  $g$  puisqu'elle contient  $\sigma_f$  et  $\sigma_g$ . On en déduit que si

$$\sigma = (x_0, \dots, x_n),$$

$f$  et  $g$  sont continues sur  $]x_i, x_{i+1}[$  pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ , donc  $\lambda f + \mu g$  et  $fg$  également ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ). Enfin,  $f$  et  $g$  admettent des limites finies à gauche et à droite en tout  $x_i$ , donc leurs combinaisons linéaires et leur produit également. ■

### Remarque.

Essentiellement, on dit que les combinaisons linéaires de fonctions en escalier (resp. cpm) sont en escalier (resp. cpm).

### Proposition 2.5

Une fonction continue par morceaux sur  $I$  est bornée.

**Démonstration.**

Pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $f$  est bornée sur  $]x_{i-1}, x_i[$  par  $m_i$  et  $M_i$  puisque c'est la restriction d'une fonction continue sur le segment  $[x_{i-1}, x_i]$ . On en déduit que  $f$  est majorée et minorée par

$$\max(M_1, \dots, M_n, f(x_0), \dots, f(x_n)), \quad \min(m_1, \dots, m_n, f(x_0), \dots, f(x_n)).$$

■

**Théorème 2.6 (Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ , et  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  en escalier sur  $I$  telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

**Démonstration.**

**(Facultative)** Cas de  $f$  continue sur  $I$ . D'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue sur  $I$ . Il existe donc  $\delta > 0$  tel que pour tous  $x, y \in I$ ,

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit alors

$$n = \left\lfloor \frac{b-a}{\delta} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*,$$

et  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  la subdivision à pas constant définie pour tout  $i = 0, \dots, n$  par

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} \quad \text{avec} \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Comme  $f$  est continue sur chaque segment  $[x_i, x_{i+1}]$ , elle y est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* il existe pour tout  $i = 0, \dots, n-1$   $c_i, d_i \in [x_i, x_{i+1}]$  tels que

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad f(c_i) \leq f(x) \leq f(d_i),$$

et comme  $0 < x_{i+1} - x_i < \delta$ , on a

$$0 \leq f(d_i) - f(c_i) < \varepsilon.$$

On définit alors les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  par

$$\forall i = 0, \dots, n-1, \forall x \in [x_i, x_{i+1}[ , \quad \varphi(x) = f(c_i), \quad \psi(x) = f(d_i),$$

et  $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$ . On a bien les conditions de l'énoncé. ■

### 3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

**Définition 3.1 (Intégrale des fonctions en escalier)**

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $I$ . On définit son intégrale sur  $I$  par

$$\int_I f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

où  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  est une subdivision quelconque subordonnée à  $f$ .

**Remarques.**

1. Remarquez qu'on définit l'intégrale sur le segment  $I$ , et qu'on n'utilise pas (encore) la notation  $\int_a^b f(x)dx$  que vous connaissez.
2. Cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie.
3. Faites un dessin pour vous rendre compte de ce que représente cette intégrale. On remarquera qu'elle est l'aire algébrique de la surface délimitée par l'axe  $Ox$  et la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.
4. Si  $f$  est constante sur  $I$ , on a alors

$$\int_I f = (b - a)f(c)$$

pour tout  $c \in I$ .

5. L'intégrale ne dépend pas de la valeur de  $f$  aux points d'une subdivision.

**Proposition 3.2**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ . Alors

$$\sup \left\{ \int_I \varphi, \varphi \in \mathcal{E}(I), \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_I \psi, \psi \in \mathcal{E}(I), \psi \geq f \right\}.$$

**Démonstration.**

**(Facultative)** Montrons tout d'abord que ces deux ensembles (notés  $E_-$  et  $E_+$ ) admettent bien une borne supérieure (pour le premier) et une borne inférieure (pour le deuxième). Remarquons tout d'abord qu'ils sont non vides puisque d'après la proposition 2.6 il existe des fonctions en escalier  $\varphi$  et  $\psi$  telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi.$$

De plus, si  $\psi \geq f$  est en escalier, on a pour toute fonction  $\varphi \leq f$  en escalier

$$\int_I \varphi \leq \int_I \psi,$$

donc le premier ensemble est majoré par  $\int_I \psi$ , donc admet une borne supérieure. Cet argument étant valable pour toutes les fonctions  $\psi \geq f$  en escalier, on a

$$\sup(E_-) \leq \int_I \psi,$$

ce qui prouve que  $E_+$  admet une borne inférieure et que

$$\sup(E_-) \leq \inf(E_+).$$

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe  $\varphi, \psi$  en escalier sur  $I$  telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

On a donc

$$0 \leq \int_I \psi - \int_I \varphi \leq (b - a)\varepsilon \quad \text{donc} \quad \inf(E_+) \leq \sup(E_-) + (b - a)\varepsilon.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\inf(E_+) \leq \sup(E_-) \quad \text{donc} \quad \inf(E_+) = \sup(E_-).$$

■

**Définition 3.3 (Intégrale des fonctions continues par morceaux)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ . On définit l'intégrale de  $f$  sur  $I$  par

$$\int_I f = \sup \left\{ \int_I \varphi, \varphi \in \mathcal{E}(I), \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_I \psi, \psi \in \mathcal{E}(I), \psi \geq f \right\}.$$

**Remarque.**

On regarde la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier inférieures à  $f$ , ou la borne inférieure des fonctions en escaliers supérieures à  $f$ . On retrouve l'idée intuitive d'aire sous la courbe, ou au-dessus de la courbe.

**Définition 3.4**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ , et  $c, d \in I$ . On définit :

$$\int_c^d f(t)dt = \begin{cases} \int_{[c,d]} f & \text{si } c < d \\ 0 & \text{si } c = d \\ - \int_{[d,c]} f & \text{si } d < c. \end{cases}$$

**Proposition 3.5 (Linéarité)**

Soient  $f, g$  des fonctions continues par morceaux sur  $I$ , et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g,$$

*i.e.* l'intégrale est une forme linéaire sur  $\mathcal{CPM}(I)$ .

**Démonstration.**

**(Facultative)**

Montrons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\int_I f + \int_I g - 2\varepsilon < \int_I (f + g) < \int_I f + \int_I g + 2\varepsilon.$$

Comme ces inégalités seront vraies pour tout  $\varepsilon > 0$ , on aura l'égalité

$$\int_I f + \int_I g = \int_I (f + g).$$

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe des fonctions en escalier  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  telles que

$$\varphi_1 \leq f \leq \psi_1, \quad \varphi_2 \leq g \leq \psi_2$$

et telles que (caractérisation des bornes supérieures et inférieures)

$$\int_I f - \varepsilon < \int_I \varphi_1, \quad \int_I g - \varepsilon < \int_I \varphi_2, \quad \int_I \psi_1 < \int_I f + \varepsilon, \quad \int_I \psi_2 < \int_I g + \varepsilon,$$

donc

$$\int_I f + \int_I g - 2\varepsilon < \int_I \varphi_1 + \int_I \varphi_2 = \int_I (\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{et} \quad \int_I (\psi_1 + \psi_2) = \int_I \psi_1 + \int_I \psi_2 < \int_I f + \int_I g + 2\varepsilon.$$

Or, par définition de  $\int_I(f+g)$ , on a

$$\int_I(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \int_I(f+g) \leq \int_I(\psi_1 + \psi_2),$$

d'où le résultat. De même on montre que

$$\int_I(\lambda f) = \lambda \int_I f$$

en séparant les cas  $\lambda > 0$  et  $\lambda < 0$ . ■

### Proposition 3.6 (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soient  $f, g$  des fonctions continues par morceaux sur  $I$ ,  $a, b \in I$  avec  $\boxed{a \leq b}$ . Alors

1. Si  $f \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$  (**positivité**)
2. Si  $f \geq g$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$  (**croissance**).

#### Démonstration.

Si  $f \geq 0$ , la fonction nulle est en escalier sur  $I$  et inférieure à  $f$ , donc

$$\int_I f \geq \int_I 0 = 0.$$

La croissance découle alors de la linéarité et de la positivité : si  $g \leq f$ , alors  $0 \leq f - g$  donc par positivité,  $0 \leq \int_I(f - g) = \int_I f - \int_I g$ . ■

### Proposition 3.7 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soient  $f \in \mathcal{CPM}(I)$ ,  $a, b \in I$  tels que  $\boxed{a \leq b}$ , alors  $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ .

#### Démonstration.

Remarquons tout d'abord que si  $f$  est continue par morceaux, il en est de même de  $|f|$  puisque la fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $f \leq |f|$  et  $-f \leq |f|$ , on a

$$\int_I f \leq \int_I |f| \quad \text{et} \quad -\int_I f = \int_I(-f) \leq \int_I |f|,$$

ce qui prouve la proposition. ■

#### Remarque.

Si on ne sait rien sur  $a$  et  $b$ , on a encore  $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)|dt \right|$ .

**Proposition 3.8 (Relation de Chasles)**

Soit  $f \in \mathcal{CPM}(I)$  et  $c, d, e \in I$ . Alors  $\int_c^d f(t)dt = \int_c^e f(t)dt + \int_e^d f(t)dt$ .

**Proposition 3.9 (Intégrale des fonctions paires et impaires)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un segment  $[-a, a]$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ).

1. Si  $f$  est paire,  $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$ .
2. Si  $f$  est impaire,  $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ .

**Proposition 3.10 (Intégrale des fonctions périodiques)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $[a, +\infty[$ , et  $T$ -périodique ( $T > 0$ ). Alors

$$\forall b \geq a, \int_b^{b+T} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

## 4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

**Théorème 4.1 (Théorème fondamental du calcul intégral)**

Soit  $f$  une fonction **continu**e sur  $I$ , et  $x_0 \in I$ . La fonction  $F$  définie sur  $I$  par

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

est la primitive de  $f$  s'annulant en  $x_0$ .

**Démonstration.**

On démontre que  $F$  est dérivable en tout  $x \in I$  et que cette dérivée vaut  $f(x)$ . Soit  $x \in I$  et  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x + h \in I$ . Pour simplifier le raisonnement, supposons  $h > 0$ . Alors

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right|$$

car  $\int_x^{x+h} f(x)dt = hf(x)$ . Or, la fonction  $t \mapsto |f(t) - f(x)|$  est continue sur le segment  $[x, x+h]$ , donc sa borne supérieure est un maximum : il existe  $x_h \in [x, x+h]$  tel que

$$\forall t \in [x, x+h], |f(t) - f(x)| \leq |f(x_h) - f(x)|.$$

On en déduit l'inégalité triangulaire intégrale et croissance de l'intégrale, ( $x+h > x$ )

$$\left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \int_x^{x+h} |f(x_h) - f(x)| dt = h|f(x_h) - f(x)|,$$

et donc :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq |f(x_h) - f(x)|.$$

Or,  $\lim_{h \rightarrow 0} x_h = x$  (théorème d'encadrement), donc par continuité de  $f$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x_h) - f(x)| = 0,$$

ce qui prouve le résultat. ■

#### Corollaire 4.2

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I)$ . Pour tous  $x_0, x \in I$ , on a  $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$ .

#### Démonstration.

La fonction  $f'$  est continue sur le segment  $[x_0, x]$ , et  $x \mapsto f(x) - f(x_0)$  est la primitive qui s'annule en  $x_0$ , donc par le théorème 4.1, c'est  $x \mapsto \int_{x_0}^x f'(t) dt$ . ■

#### Théorème 4.3

Soit  $f$  une fonction **continue et de signe constant** sur  $I$ . Alors

$$f = 0 \iff \int_a^b f(t) dt = 0.$$

#### Démonstration.

Si  $f = 0$ , son intégrale de  $a$  à  $b$  est nulle.

Réciproquement, supposons  $\int_a^b f(t) dt = 0$ . Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$ . Elle est croissante sur  $I$  car  $F' = f \geq 0$ , et

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt = 0 = F(a),$$

donc  $F$  est constante et  $f = F' = 0$ . ■

#### Remarque.

Attention, ce théorème est faux si  $f$  est juste continue par morceaux.

#### Corollaire 4.4

Soit  $f$  une fonction continue, positive, non nulle sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ). Alors  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

#### Démonstration.

Par croissance de l'intégrale, comme  $a < b$ , on a  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ . Supposons alors  $\int_a^b f(x)dx = 0$ . Comme  $f$  est positive, on aurait  $f = 0$  : contradiction. ■

**Remarque.**

Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est continue par morceaux si ses parties réelle et imaginaire le sont. On définit alors

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(f).$$

On a les mêmes propositions que pour les fonctions à valeurs réelles, sauf bien entendu la positivité, la croissance, ni le théorème 4.3.

**Définition 4.5 (Sommes de Riemann)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ ),  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les sommes

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right), \quad R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

sont des sommes de Riemann associées à  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Remarque.**

En particulier, pour  $a = 0$  et  $b = 1$ , on a  $R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$  et  $R'_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ .

**Proposition 4.6 (Sommes de Riemann)**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ ),  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt, \quad R'_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

**Démonstration.**

On traite le cas où  $f$  est lipschitzienne. Il existe donc  $k > 0$  tel que, pour tout  $x \in I$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ .

Notons  $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ .

En remarquant que  $\frac{b-a}{n}f(a_i) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(a_i)dt$  (intégrale d'une constante), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)dt - R_n(f) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) dt \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t) - f(a_i)) dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(t) - f(a_i)| dt \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} k|t - a_i| dt = k \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |t - a_i| dt \\ &= k \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (t - a_i) dt = k \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{(t - a_i)^2}{2} \right]_{a_i}^{a_{i+1}} \\ &= k \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(a_{i+1} - a_i)^2}{2} = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{k(b-a)^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On fait de même pour  $R'_n(f)$ . ■

## 5 Formules de Taylor

Dans ce paragraphe, nous voyons des formules qui permettent d'approcher des fonctions par des fonctions polynomiales.

### **Théorème 5.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$ . Alors pour tous  $a, b \in I$ , on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du.$$

C'est la *formule de Taylor avec reste intégral* à l'ordre  $n$  entre  $a$  et  $b$ , ou encore *formule de Taylor avec reste intégral en  $a$*  si on ne veut pas préciser  $b$ .

### **Démonstration.**

On démontre la première formule par récurrence sur  $n$ .

Cas  $n = 0$  : comme  $f$  est de classe  $C^1$ , on a

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x) dx,$$

ce qui est bien la formule de l'énoncé à l'ordre 0.

Soit alors  $n \geq 1$  pour lequel la formule est vraie à l'ordre  $n-1$ . Soit alors  $f$  de classe  $C^{n+1}$ . Par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx &= \left[ -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

Cette intégration par parties est licite puisque  $f^{(n+1)}$  est continue. Or, par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

Ceci prouve la formule au rang  $n$ . ■

### Exemples.

1. Pour un polynôme de degré  $n$ , la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre  $p \geq n$  n'est rien d'autre que la formule de Taylor puisque la dérivée d'ordre  $p+1 \geq n+1$  est nulle.
2. La dérivée  $k^{\text{ième}}$  de l'exponentielle en 0 vaut 1 pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . La formule de Taylor avec reste intégral en 0 est donc

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

3. **(Exemple facultatif)** La fonction

$$x \mapsto \ln(1+x)$$

définie sur  $] -1, +\infty[$  admet comme dérivée  $k^{\text{ième}}$  ( $k \geq 1$ )

$$x \mapsto \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}$$

ce qui donne en 0  $(-1)^{k-1} (k-1)!$ . La formule de Taylor avec reste intégral en 0 est donc

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(1+u)^{n+1}} du,$$

la somme partant de 1 car en 0 la fonction vaut  $\ln(1) = 0$ .

### Corollaire 5.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  et  $a, b \in I$ . Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{u \in [a,b]} |f^{(n+1)}(u)|.$$

### Démonstration.

Remarquons que  $f^{(n+1)}$  est bornée sur le segment  $[a, b]$  puisqu'elle y est continue. Notons  $M = \sup_{u \in [a,b]} |f^{(n+1)}(u)|$ .

Pour démontrer la majoration, on applique la formule de Taylor à l'ordre  $n$  (possible car  $f$  est de classe  $C^{n+1}$ ). Pour simplifier, on suppose  $a < b$ . On a

$$\begin{aligned} \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{(b-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) \right| du \leq \int_a^b \left| \frac{(b-u)^n}{n!} \right| \times M du \\ &\stackrel{a \leq b}{\leq} M \int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} du = M \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité. ■

### Exemples.

1. Reprenons l'exemple de l'exponentielle en 0. Si  $x \in \mathbb{R}$ , la dérivée  $(n+1)^{\text{ième}}$  de l'exponentielle sur l'intervalle  $[0, x]$  ou  $[x, 0]$  est majorée par  $e^{|x|}$ , donc l'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

pour tout entier  $n$ . Or, à  $x$  fixé, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \right) = 0,$$

ce qui prouve que pour tout réel  $x$  on a

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

2. (**Exemple facultatif**) De même, l'exemple de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  nous impose d'étudier

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{u \in [0, x]} \left( \frac{n!}{|1+u|^{n+1}} \right) = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \sup_{u \in [0, x]} \left( \frac{1}{|1+u|^{n+1}} \right).$$

Mais,

$$\sup_{[0, x]} \frac{1}{|1+u|^{n+1}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ \frac{1}{(1+x)^{n+1}} & \text{si } x \in ]-1, 0[, \end{cases}$$

donc si  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \sup_{u \in [0, x]} \left( \frac{1}{|1+u|^{n+1}} \right) \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Puis, si  $x \in ]-1/2, 0[$ ,  $\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \leq 2^{n+1}$ , donc

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \sup_{u \in [x, 0]} \left( \frac{1}{|1+u|^{n+1}} \right) = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \frac{1}{|1+x|^{n+1}} \leq \frac{2|x|^{n+1}}{n+1} \stackrel{|x| \leq \frac{1}{2}}{\leq} \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc

$$\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{pour } x \in \left[ -\frac{1}{2}, 1 \right].$$

La limite reste vraie pour  $x \in ]-1, -1/2[$ , mais on ne peut pas le démontrer comme ci-dessus.