

## Corrigé du DS n° 9.

**Exercice 1**    1. On a  $f((x, y, z)) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix}$ .

2. (a) Par linéarité, on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f + \text{id}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}) = M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

De même,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - 2\text{id}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - 2\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}) = M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

(b) On a

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f + \text{id}) \iff (M + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

On en déduit que  $\boxed{\text{Ker}(f + \text{id}) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}}$ .

De même,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f - 2\text{id}) &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 & L_2 \\ -3y + 3z = 0 & 2L_2 + L_1 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 - L_2 \end{cases} \\ &\iff x = y = z, \end{aligned}$$

(c) La méthode pour obtenir des bases de ces noyaux est alors classique. On obtient

$$\boxed{\text{Ker}(f + \text{id}) = \text{vect}(e_1, e_2)} \quad \boxed{\text{Ker}(f - 2\text{id}) = \text{vect}(e_3)},$$

où  $e_1 = (1, 0, -1)$  et  $e_2 = (0, 1, -1)$ , et  $e_3 = (1, 1, 1)$ .

(d) On a  $\dim(\text{Ker}(f + \text{id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id}_E)) = 2 + 1 = 3 = \dim(E)$ , donc il suffit de montrer que  $\text{Ker}(f + \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) = \{0\}$ . Or, si  $u \in \text{Ker}(f + \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ , alors  $f(u) = -u = 2u$ , donc  $u = 0$ .

3. C'est l'union de bases de sous-espaces vectoriels supplémentaires, donc une base de  $E$ . On a  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. On a  $f(e_1) = -e_1$  car  $e_1 \in \text{Ker}(f + \text{id})$ . De même,  $f(e_2) = -e_2$  et  $f(e_3) = 2e_3$ .

D'où  $M_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est bien diagonale.

5. La formule de changement de base donne

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1}^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1},$$

ce qui donne  $M = PM_1P^{-1}$ .

6. On en déduit  $M^n = P M_1 P^{-1} \dots P M_1 P^{-1} = P M_1^n P^{-1}$ .

## Problème

### Partie 1

1. (a) — On a  $ABAB' = (ABA)B' = AB'$  car  $B$  est un pseudo-inverse, et de même  $BAB'A = B(AB'A) = BA$  car  $B'$  est un pseudo-inverse.  
— On en déduit que  $AB' = ABAB' = (AB)(AB') = (BA)(B'A) = BA$ .
- (b) On a donc  $B = BAB = (BA)B = (AB')B$  et  $B' = B'AB' = B'(AB') = B'(BA)$
- (c) On en déduit que  $B = AB'B = (AB')B = (B'A)B = B'(AB) = B'(BA) = B'$ .
- (d) On a démontré qu'en cas d'existence, il y a un seul pseudo-inverse.
2. C'est  $A^{-1}$ , ce qui se vérifie facilement car  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .
3. (a) Montrons que  $P^{-1}BP$  est le pseudo-inverse de  $P^{-1}AP$ . En effet, on a par exemple

$$P^{-1}APP^{-1}BPP^{-1}AP = P^{-1}ABAP = P^{-1}AP,$$

et de même pour les autres conditions.

- (b) Dans la définition de pseudo-inverse,  $A$  et  $B$  jouent un rôle symétrique, donc  $A$  est le pseudo-inverse de  $B$ .

### Partie 2

1. Pour  $u = (x, y, z)$ , on a

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = -y = z \iff u = x(1, -1, 1) \end{aligned}$$

et  $\text{Ker}(f) = \text{vect}((1, -1, 1))$ , qui est donc de dimension 1. Par le théorème du rang, le  $\text{rang}(f) = 2$ . Mais les deux premières colonnes de  $A$  sont lin. ind., donc  $((1, 2, 3), (1, 3, 5))$  forme une base de  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(f) = \text{vect}((1, 2, 3), (1, 3, 5))$ , et par ex  $e_1 = (1, 2, 3)$ ,  $e_2 = (1, 3, 5)$  et  $e_3 = (1, -1, 1)$ .

2. D'après le théorème du rang, il suffit de montrer que  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ . Or, si  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a(1, 2, 3) + b(1, 3, 5) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ , on a

$$(0, 0, 0) = af((1, 2, 3)) + bf((1, 3, 5)) = a(3, 11, 19) + b(4, 16, 28),$$

donc  $3a + 4b = 11a + 16b = 0$ , donc  $a = b = 0$  et  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

3. (a) C'est une conséquence de 2 : l'union de bases de sous-espaces vectoriels supplémentaires forme une base de l'espace tout entier.
- (b) Par définition, on a  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ . On détermine  $P^{-1}$  par une résolution de système ou un pivot de Gauss, et on obtient  $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ . On a alors  $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
4. (a) On a donc  $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ , de déterminant non nul, donc inversible.
- (b) D'après la partie 1, Q3(a), le pseudo-inverse de  $A$  est  $PU'P^{-1}$ .

### Partie 3

1. (a) Soit  $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ , i.e.  $y = f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) et  $f(y) = 0$ . On a donc  $f^2(x) = 0$ , donc  $g(f^2(x)) = g(0) = 0$ . Or,  $g$  et  $f$  commutent, donc  $f(g(f(x))) = 0$ , i.e.  $f(x) = 0$  car  $f \circ g \circ f = f$ . On a bien  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ . Par le théorème du rang, ils sont supplémentaires.
- (b) La définition de pseudo-inverse nous dit que  $f g f = f$ ,  $g f g = g$ ,  $f g = g f$ . Mais si  $x \in \text{Ker}(f)$ , on a  $g(x) = g f g(x) = g^2 f(x) = g^2(0) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker}(g)$ , et  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$ . Par symétrie des rôles de  $f$  et  $g$ , on a bien  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ .

Puis, si  $x \in E$ , on a  $f(x) = f g f(x) = g(f^2(x))$ , donc  $f(x) \in \text{Im}(g)$ , donc  $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$ , et finalement  $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$ .

- (c) — On a  $(AB)^2 = ABAB = (ABA)B = AB$ . On a donc  $p \circ p = p$ , donc  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(f \circ g)$  et parallèlement à  $\text{Ker}(f \circ g)$ .
- Or,  $\text{Im}(f \circ g) = f(\text{Im}(g)) = f(\text{Im}(f)) = \text{Im}(f^2)$ . Mais  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ , donc  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$  et donc  $\boxed{\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)}$ .
- Enfin,  $\boxed{\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}(f)}$ . En effet,  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ , donc si  $x \in \text{Ker}(f)$ , on a  $g(x) = 0$  donc  $f(g(x)) = 0$  et  $x \in \text{Ker}(f \circ g)$ . Réciproquement, si  $x \in \text{Ker}(f \circ g)$ , on a  $f(g(x)) = 0$ , donc  $g(f(g(x))) = g(0) = 0$ , donc  $g(x) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$ .
2. (a) — Si  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , alors  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$ , donc  $A$  est inversible et son pseudo-inverse est  $A^{-1}$ .
- Si  $\text{Im}(f) = 0$ , alors  $A = 0$ , et son pseudo-inverse est 0.
- (b) Soit  $p$  la projection sur  $\text{Im}(f)$  et parallèlement à  $\text{Ker}(f)$ . Soit

$$\begin{aligned} v : \text{Im}(f) &\longrightarrow \text{Im}(f) \\ y &\longmapsto f(y) \end{aligned}$$

est un automorphisme de  $F$  (car son noyau est  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ , et c'est un endomorphisme en dimension finie). Soit  $g = v^{-1} \circ p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  (on voit  $v^{-1}$  comme à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  plutôt que  $\text{Im}(f)$ ).

Montrons que  $f \circ g \circ f = f$ ,  $g \circ f \circ g = g$ ,  $f \circ g = g \circ f$ . Cela prouvera que la matrice canoniquement associée à  $g$  est le pseudo-inverse de  $A$ .

- On a  $\boxed{p \circ f = f}$  par définition d'une projection sur  $\text{Im}(f)$ .
- $\boxed{f = v \circ p}$  car si  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $x = p(x) + (x - p(x)) = p(x) + z$  avec  $z \in \text{Ker}(p) = \text{Ker}(f)$ , donc  $f(x) = f(p(x) + z) = f(p(x)) = v(p(x))$  puisque  $p(x) \in \text{Im}(f)$ .
- $\boxed{f \circ g = p}$  car si  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $p(x) \in \text{Im}(f)$ , donc  $f \circ v^{-1} \circ p(x) = v \circ v^{-1} \circ p(x) = p(x)$ .

— On en déduit que  $f \circ g \circ f = p \circ f = f$ .

— Puis  $g \circ f \circ g = g \circ p = v^{-1} \circ p \circ p = v^{-1} \circ p = g$  ( $p^2 = p$ ).

— Et enfin  $g \circ f = v^{-1} \circ p \circ f = v^{-1} \circ f = v^{-1} \circ v \circ p = p = f \circ g$

3. Les questions 1 et 2 prouvent que  $A$  admet un pseudo-inverse si et seulement si  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ . (où  $f$  est l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ ). Or, on a vu en td que ceci est équivalent, en dimension finie, à  $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ . Mais on a toujours  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ , donc l'égalité est équivalent à l'égalité des dimensions, donc à  $\text{rang}(f^2) = \text{rang}(f)$ , ou encore à  $\text{rang}(A^2) = \text{rang}(A)$ .