

Chapitre 28

Déterminants

On fixe un corps K , deux K -espaces vectoriels E et F , et un entier $n > 0$.

1 Groupes symétriques

Dans ce paragraphe, on se fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Groupe symétrique)

1. Le *groupe symétrique* (\mathcal{S}_n, \circ) est le groupe des *permutations* de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, *i.e.* le groupe des bijections

$$\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

muni de la composition des applications. C'est un groupe à $n!$ éléments.

2. Pour $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, la *transposition* $(i\ j) \in \mathcal{S}_n$ est la permutation τ de $\{1, 2, \dots, n\}$ définie pour $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ par

$$\tau(x) = x \quad \text{si} \quad x \neq i, j, \quad \tau(i) = j, \quad \tau(j) = i.$$

3. Un *p -cycle* ($p \leq n$) est un élément σ de \mathcal{S}_n pour lequel il existe $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ distincts deux à deux tels que

$$\sigma(x) = x \quad \text{si} \quad x \notin \{i_1, \dots, i_p\}, \quad \sigma(i_k) = i_{k+1} \quad \text{si} \quad k < p, \quad \sigma(i_p) = i_1.$$

On le note $(i_1\ i_2 \ \dots \ i_p)$.

4. Le *support* d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est l'ensemble $\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) \neq i\}$.

Proposition 1.2 (Décomposition d'un cycle en produit de transpositions)

Soient $a_1, \dots, a_p \in \{1, \dots, n\}$ deux à deux distincts ($2 \leq p \leq n$). Alors

$$(a_1 \ \dots \ a_p) = (a_1\ a_2) \cdots (a_{p-1}\ a_p).$$

Proposition 1.3 (Permutations à support disjoint)

Deux permutations de \mathcal{S}_n à supports disjoints commutent.

Proposition 1.4

1. Une transposition τ est une involution, *i.e.*

$$\tau^2 = \text{id},$$

ce qui signifie que $\tau^{-1} = \tau$.

2. Le symétrique d'un p -cycle $(i_1 \cdots i_p)$ est

$$(i_1 \cdots i_p)^{-1} = (i_p i_{p-1} \cdots i_1) = (i_1 \cdots i_p)^{p-1},$$

ce qui signifie que $(i_1 \cdots i_p)^p = \text{id}$.

Théorème 1.5

Toute permutation est un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.

Méthode 1.6

Pour décomposer une permutation σ en produit de cycles à supports deux à deux disjoints, on regarde la suite finie $(1, \sigma(1), \dots, \sigma^i(1))$, avec $\sigma^{i+1}(1) = 1$. Cela donne un premier cycle. Puis on choisit le plus petit entier qui n'est pas dans cette suite, et on recommence. Par exemple avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On part de 1, dont l'image est 3, dont l'image est 1 : cela nous donne le cycle $(1\ 3)$. Puis on part de 2, dont l'image est 5, dont l'image est 4, dont l'image est 2 : cela donne le cycle $(2\ 5\ 4)$, et finalement $\sigma = (1\ 3)(2\ 5\ 4) = (2\ 5\ 4)(1\ 3)$.

Proposition 1.7

Toute permutation est un produit de transposition.

Méthode 1.8

Voici sur l'exemple $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ une méthode générale pour décomposer une permutation σ en transpositions. On part du plus petit entier dans le support. Ici, c'est 1. Son image est 3, et son image est 1 : cela donne la transposition $(1\ 3)$. L'entier suivant qui est dans le support est 2. Son image est 5, dont l'image est 7, dont l'image est 6, dont l'image est 2 : cela donne le produit $(2\ 5)(5\ 7)(7\ 6)$. Et finalement $\gamma = (1\ 3)(2\ 5)(5\ 7)(7\ 6)$. Vérifiez !

1.2 Signature

Définition 1.9 (Signature)

La signature $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)},$$

où $I(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ , *i.e.* le nombre de couples (i, j) tels que

$$1 \leq i < j \leq n \quad \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Une permutation est *paire* si sa signature est 1, *impaire* sinon.

Proposition 1.10

Pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Proposition 1.11

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Corollaire 1.12

La signature d'un p -cycle est $(-1)^{p-1}$ ($p \geq 2$).

2 Applications multilinéaires

On fixe dans ce paragraphe un corps K , deux K -espaces vectoriels E et F , et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.1 (Applications multilinéaires)

1. Une *application n -linéaire* de E dans F est une application

$$f : E^n \longrightarrow F$$

telle que pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$, tout $i = 1, \dots, n$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{array}$$

soit linéaire

2. Une *forme n -linéaire* sur E est une application n -linéaire de E dans K .

Méthode 2.2

Il faut remarquer que si f est n -linéaire, le calcul de $f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ se passe comme un développement d'un produit (et de même en remplaçant $x_k + y_k$ par une somme quelconque). Par exemple, si f est bilinéaire, $x, y \in E$ et $a_{ij} \in K$ (pour $i, j = 1, 2$, on a

$$f(a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y) = a_{11}a_{12}f(x, x) + a_{11}a_{22}f(x, y) + a_{21}a_{12}f(y, x) + a_{21}a_{22}f(y, y).$$

Comparez avec le produit $(a_{11}x + a_{21}y) \times (a_{12}x + a_{22}y)$ si tous ces variables sont des réels.

On peut faire de même avec une application trilinéaire et trois vecteurs. Le développement donne 3^3 termes.

Définition 2.3 (Applications multilinéaires symétriques, antisymétriques, alternées)

Soit f une application n -linéaire de E dans F . Alors

1. f est *symétrique* si pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$ et $i \neq k$,

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_i, a_{k+1}, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$
2. f est *antisymétrique* si pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$ et $i \neq k$

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_i, a_{k+1}, \dots, a_n) = -f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$
3. f est *alternée* si pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$ et $i \neq k$,

$$a_i = a_k \implies f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Proposition 2.4

Une application n -linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Proposition 2.5

Soit f une forme p -linéaire alternée sur E , et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

1. Si la famille (u_1, \dots, u_p) est liée, alors $f(u_1, \dots, u_p) = 0$.
2. $f(u_1, \dots, u_p)$ reste inchangée si l'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

3 Déterminants

Dans ce paragraphe, on suppose que $\dim(E) = n$. Cette hypothèse est **fondamentale** pour ce qui suit.

Théorème 3.1 (Déterminant dans une base de n vecteurs)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Il existe une unique forme n -linéaire alternée notée $\det_{\mathcal{B}}$ sur E telle que

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

2. Toute forme n -linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.
3. Soit (u_1, \dots, u_n) est une famille de vecteurs de E et $A = (a_{ij}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}.$$

Théorème 3.2 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour toutes bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E , on a

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')).$$

Ce scalaire, indépendant de toute base, est le *déterminant de f* , et on le note $\det(f)$.

Définition 3.3 (Déterminant d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Le déterminant de A (noté $\det(A)$) est le déterminant dans la base canonique de K^n de ses vecteurs colonnes, *i.e.* si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Notation : Le déterminant d'une matrice se note avec des barres verticales à la place des parenthèses. Par exemple :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

Proposition 3.4 (Déterminant de taille 2)

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Alors $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Méthode 3.5 (Déterminant de taille 3 : règle de Sarrus)

ATTENTION : technique uniquement valable pour les déterminants de taille 3!!

Voici une façon de retrouver le déterminant d'une matrice carrée de taille 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

On recopie les deux premières lignes sous la matrice, pour obtenir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

On a 3 "diagonales principales"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & a_{12} & a_{13} & & \\ & & a_{23} & & \end{pmatrix}$$

et on multiplie dans chaque diagonale les éléments, et on ajoute, pour obtenir

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}.$$

On a aussi 3 "diagonales secondaires"

$$\begin{pmatrix} & & a_{13} & & \\ & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & & & & \end{pmatrix}$$

et on multiplie dans chaque diagonale les éléments, et on ajoute, pour obtenir

$$a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}.$$

On soustrait alors cette deuxième somme à la première, pour obtenir le déterminant :

$$\left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \right) - \left(a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} \right).$$

On avait obtenu cela dans les exemples après le théorème 3.1.

Théorème 3.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $\det(A) = \det(A^T)$.

Théorème 3.7

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det(A),$$

i.e. le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base.

2. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(A).$$

Méthode 3.8

Nous avons donc trois déterminants :

1. Le déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base \mathcal{B} d'un espace de dimension n (théorème 3.1).
2. Le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (théorème 3.2).
3. Le déterminant d'une matrice carrée (définition 3.3).

Ces trois déterminants sont liés par le théorème 3.7. En pratique, pour calculer un déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme, on passe par ce théorème pour calculer le déterminant d'une matrice carrée. Et pour cela, on utilisera les résultats du paragraphe 5.

4 Propriétés des déterminants

Dans ce paragraphe, on suppose toujours que $\dim(E) = n$. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E , $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, sauf mention explicite du contraire.

Proposition 4.1

On a

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \iff \det \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \right) \neq 0.$$

Proposition 4.2

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. On a

1. $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det(f) \det(g)$ et $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B)$.
2. L'endomorphisme f est un isomorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et alors

$$\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}.$$

De même, la matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et alors

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

3. Si $\lambda \in K$, on a

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f), \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Proposition 4.3

1. Le déterminant d'une matrice carrée ne change pas si à une colonne (resp. une ligne) on ajoute une combinaison linéaire des **autres**.
2. Le déterminant d'une matrice carrée est multiplié par -1 si on échange deux colonnes ou deux lignes.
3. Le déterminant d'une matrice carrée est nul si deux colonnes ou deux lignes sont égales.
4. Le déterminant d'une matrice carrée est nul si une colonne (resp. ligne) est combinaison linéaire des autres.
5. Si on multiplie une colonne ou une ligne par $\lambda \in K$, le déterminant est multiplié par λ .

5 Développement suivant une ligne ou une colonne

Dans ce paragraphe on se concentre sur le calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée. Le théorème 3.7 permet alors de calculer le déterminant d'un endomorphisme et d'une famille de vecteurs.

ATTENTION : La plupart du temps, vous aurez à calculer des déterminants de matrices qui dépendent d'un ou de plusieurs paramètres, et on cherchera à savoir à quelle(s) condition(s) ce déterminant est nul. On cherchera donc absolument à obtenir une forme factorisée du déterminant. En particulier, pour un déterminant de taille 3, la règle de Sarrus ne servira que pour un déterminant numérique.

Proposition 5.1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(K),$$

où $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$, $a_{11} \in K$ et \star désigne n'importe quel élément de K . Alors

$$\det(A) = a_{11} \det(A').$$

En particulier, si A est une matrice triangulaire (ou diagonale),

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Définition 5.2 (Mineur, cofacteur)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. Le *mineur* de a_{ij} est le déterminant Δ_{ij} de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
2. Le *cofacteur* de a_{ij} est $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Théorème 5.3 (Développement suivant une ligne/colonne)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. Pour tout $j = 1, \dots, n$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad (\text{Développement suivant la } j^{\text{ème}} \text{ colonne}).$$

2. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad (\text{Développement suivant la } i^{\text{ème}} \text{ ligne}).$$

6 Applications

6.1 Comatrice

Définition 6.1 (Comatrice)

La *comatrice* de A est sa matrice des cofacteurs, *i.e.* la matrice $\text{co}(A) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ avec

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Proposition 6.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors

$$A^t \text{co}(A) = {}^t \text{co}(A) A = \det(A) I_n.$$

En particulier, si A est inversible, on a

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} {}^t \text{co}(A).$$

6.2 Formules de Cramer

Définition 6.3 (Système de Cramer)

Un *système de Cramer* est un système linéaire à n équations et n inconnues qui admet une et une seule solution, *i.e.* un système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, où $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $A \in GL_n(K)$.

Proposition 6.4

Soit $A \in GL_n(K)$ et S le système

$$AX = B,$$

(c'est un *système de Cramer*), où $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. L'unique solution (x_1, \dots, x_n) de ce système vérifie pour tout $j = 1, \dots, n$

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

où A_j est la matrice obtenue en remplaçant dans A la $j^{\text{ème}}$ colonne par B .

7 Compétences

1. Un déterminant n'existe que pour une matrice carrée.
2. Calcul effectif d'un déterminant. Cas de matrices avec des paramètres : on cherche une forme factorisée, par exemple en développant par rapport une ligne/colonne.
3. Connaître le lien déterminant d'une application linéaire/d'une matrice.
4. Lien déterminant/isomorphisme.
5. Déterminer une cns pour qu'une application linéaire donnée par une matrice qui dépend d'un paramètre soit un isomorphisme.
6. Calcul effectif du rang d'une matrice par manipulation sur les lignes et les colonnes. Discussion quand on arrive à une forme triangulaire.