

Chapitre 30

Fonctions de deux variables réelles

Dans tout ce chapitre, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .

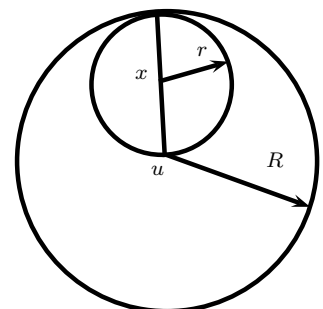
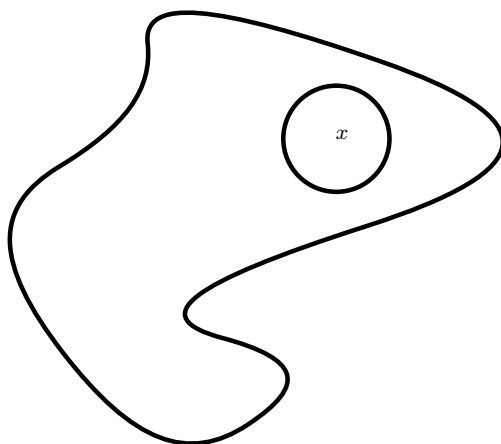
1 Continuité

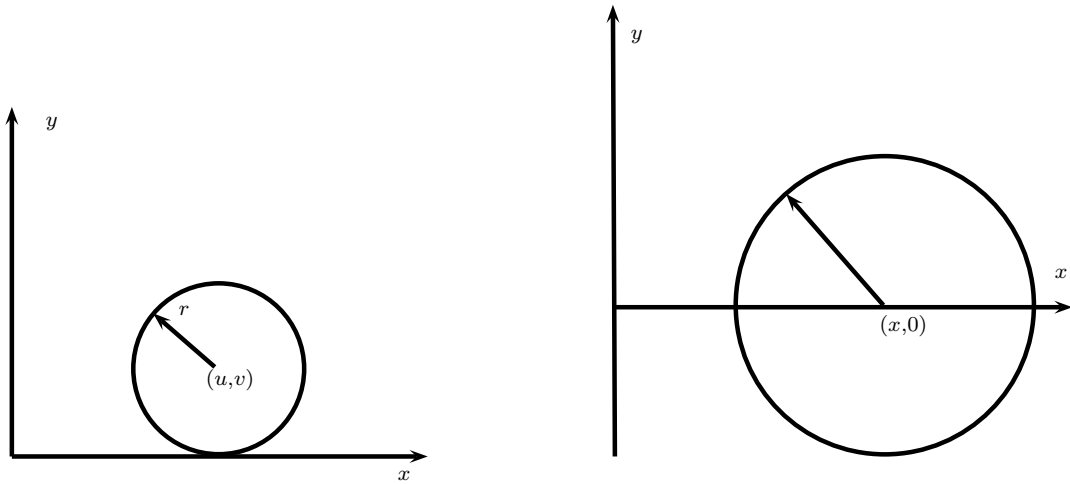
Définition 1.1 (Ouvert de \mathbb{R}^2)

Un *ouvert* de \mathbb{R}^2 est un sous-ensemble U de \mathbb{R}^2 tel que,

$$\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U,$$

où $B(x, r) = \{z \in \mathbb{R}^2, \|z - x\| < r\}$ (disque centré en x) est la *boule ouverte* centrée en x .





Dans tout ce paragraphe, A désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, i.e. une fonction de A dans \mathbb{R} .

Définition 1.2 (Continuité)

Soit $a \in \mathbb{R}^2$.

1. La fonction f admet une limite en a si

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in A, \|z - a\| \leq \eta \implies |f(z) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\ell = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

2. Si $a \in A$, la fonction f est continue en a si elle admet une limite en a . Cette limite est alors nécessairement $f(a)$.
3. La fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .

2 Calcul différentiel

2.1 Dérivées partielles

Dans toute la suite de ce chapitre, U désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , $(x_0, y_0) \in U$ et f une fonction de U dans \mathbb{R} .

Définition 2.1 (Dérivées partielles)

1. La première dérivée partielle de f en (x_0, y_0) est, lorsqu'elle existe, la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$. On la note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
2. La deuxième dérivée partielle de f en (x_0, y_0) est, lorsqu'elle existe, la dérivée en y_0 de la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$. On la note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Définition 2.2

Les fonctions dérivées partielles de f sont, si elles existent, les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} .$$

2.2 Fonctions de classe C^1 **Définition 2.3 (Fonctions de classe C^1)**

La fonction f est de classe C^1 sur U si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si celles-ci sont continues sur U .

Proposition 2.4 (Espace vectoriel des fonctions de classe C^1)

L'ensemble $C^1(U)$ des fonctions de classe C^1 sur U est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Théorème 2.5 (Développement limité d'ordre pour les fonctions de classe C^1)

Soit f de classe C^1 sur U et $(x_0, y_0) \in U$. Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$. Alors

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|).$$

Corollaire 2.6 (Continuité d'une fonction de classe C^1)

Une fonction f de classe C^1 sur U est continue sur U .

2.3 Fonctions composées**Proposition 2.7 (Dérivée d'une fonction composée : règle de la chaîne)**

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , f une fonction de classe C^1 sur U à valeurs dans \mathbb{R} , et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans U . La fonction $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et on a

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \times \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \times \varphi_2'(t).$$

Méthode 2.8

Moyen mnémotechnique pour retenir cette formule. Avec $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ (i.e. $\varphi_1(t) = x(t)$ et $\varphi_2(t) = y(t)$), on a

$$(f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t),$$

ou plus court, en "oubliant" les variables,

$$(f \circ \varphi)' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Proposition 2.9

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} , et f une fonction de classe C^1 sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} , telle que $\forall (u, v) \in U, (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \in V$. Alors la fonction $g : (u, v) \mapsto f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ définie sur U admet des dérivées partielles en tout $(u, v) \in U$, et on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v)\end{aligned}$$

Méthode 2.10

Méthode mnémotechnique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\end{aligned}$$

et si on note $\varphi_1(u, v) = x(u, v)$ et $\varphi_2(u, v) = y(u, v)$, les formules deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

2.4 Gradient**Définition 2.11 (Gradient)**

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in U$. Le gradient de f en (x_0, y_0) est le vecteur $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$.

Proposition 2.12 (Expression du développement limité à l'aide du gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} , et $(x_0, y_0) \in U$. Le développement limité de f en (x_0, y_0) à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|).$$

Proposition 2.13 (Règle de la chaîne avec le gradient)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , f une fonction de classe C^1 sur U à valeurs dans \mathbb{R} , et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans U . Alors

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle.$$

3 Application : recherche d'extremums

Définition 3.1 (Extremum global)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum global sur A s'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que : $\forall (x, y) \in A, f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.
2. f admet un maximum global sur A s'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que : $\forall (x, y) \in A, f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.
3. f admet un extremum global sur A si elle admet un minimum ou un maximum global sur A .

Définition 3.2 (Extremum local)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in A \cap B((x_0, y_0), r), f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

2. f admet un maximum local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in A \cap B((x_0, y_0), r), f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

3. f admet un extremum local sur A si elle admet un minimum ou un maximum local sur A .

Définition 3.3 (Point critique)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Un point critique de f est un point $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Proposition 3.4 (Condition nécessaire d'extremum en un point)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Si f admet un extremum en (x_0, y_0) (local ou global), alors (x_0, y_0) est un point critique.