Chapitre 30

Fonctions de deux variables réelles

Dans tout ce chapitre, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

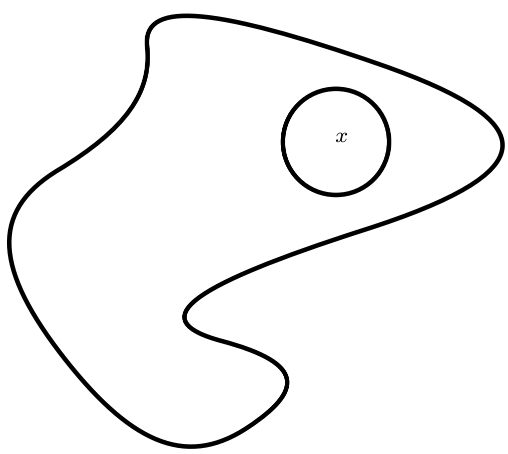
1 Continuité

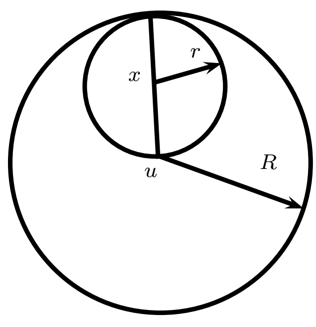
Définition 1.1 (Boule ouverte)

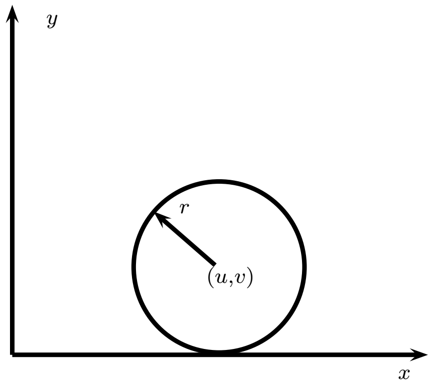
1. Une **boule ouverte** de $\mathbb{R}^2$ est un disque du plan de rayon strictement positif, privé du cercle extérieur.
2. **La boule ouverte de centre** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ **et de rayon** $r > 0$ est l'ensemble $B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$.

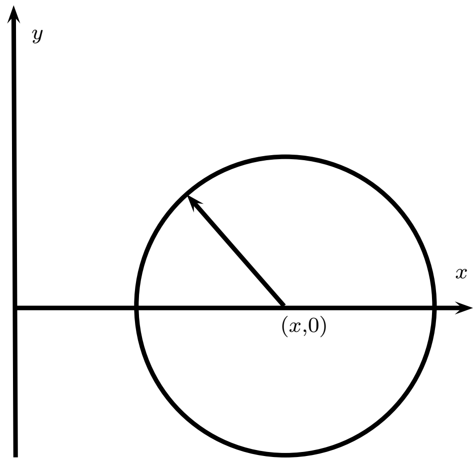
Définition 1.2 (Ouvert de $\mathbb{R}^2$)

Un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ tel que, $\forall\ (x, y) \in U,\ \exists\ r > 0,\ B((x, y), r) \subset U$.









Dans tout ce paragraphe, A désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, *i.e.* une fonction de A dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3 (Continuité)

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. La fonction f *admet une limite en* (x_0, y_0) si

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, (x, y) \in A,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x, y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\ell = \lim\limits_{z \to a} f(z)$.

2. Si $(x_0, y_0) \in A$, la fonction f est *continue en* (x_0, y_0) si elle admet une limite en (x_0, y_0). Cette limite est alors nécessairement $f(x_0, y_0)$.

3. La fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

2 Calcul différentiel

2.1 Dérivées partielles

Dans toute la suite de ce chapitre, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 (Dérivées partielles)

1. La *première dérivée partielle* de f en (x_0, y_0) est, lorsqu'elle existe, la dérivée en x_0 de la fonction $x \longmapsto f(x, y_0)$. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

2. La *deuxième dérivée partielle* de f en (x_0, y_0) est, lorsqu'elle existe, la dérivée en y_0 de la fonction $y \longmapsto f(x_0, y)$. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Définition 2.2

Les fonctions dérivées partielles de f sont, si elles existent, les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}.$$

2.2 Fonctions de classe C^1

Définition 2.3 (Fonctions de classe C^1)

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si celles-ci sont continues sur U.

Proposition 2.4 (Espace vectoriel des fonctions de classe C^1)

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$.

Théorème 2.5 (Développement limité d'ordre pour les fonctions de classe C^1)

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $(x_0,y_0) \in U$. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h, y_0+k) \in U$. Alors

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(\|(h,k\|).$$

Corollaire 2.6 (Continuité d'une fonction de classe C^1)

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U.

2.3 Fonctions composées

Proposition 2.7 (Dérivée d'une fonction composée : règle de la chaîne)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U. La fonction $f \circ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\forall\, t \in I,\ (f\circ\varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \times \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \times \varphi_2'(t).$$

Méthode 2.8

Moyen mnémotechnique pour retenir cette formule. Avec $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ (*i.e.* $\varphi_1(t) = x(t)$ et $\varphi_2(t) = y(t)$), on a

$$(f\circ\varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \times y'(t),$$

ou plus court, en "oubliant" les variables,

$$(f\circ\varphi)' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}.$$

Proposition 2.9

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que : $\forall\ (u,v) \in U,\ (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \in V$. Alors la fonction $g : (u,v) \longmapsto f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ définie sur U admet des dérivées partielles en tout $(u,v) \in U$, et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)$$

Méthode 2.10

Méthode mnémotechnique :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}$$

et si on note $\varphi_1(u,v) = x(u,v)$ et $\varphi_2(u,v) = y(u,v)$, les formules deviennent :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

2.4 Gradient

Définition 2.11 (Gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in U$. La gradient de f en (x_0, y_0) est le vecteur $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

Proposition 2.12 (Expression du développement limité à l'aide du gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(x_0, y_0) \in U$. Le développement limité de f en (x_0, y_0) à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0)\ , (h,k) \rangle + o(\|(h,k)\|).$$

Proposition 2.13 (Règle de la chaine avec le gradient)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U. Alors

$$\forall\ t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t))\ , \varphi'(t) \rangle\ .$$

3 Application : recherche d'extremums

Définition 3.1 (Extremum global)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum global sur A s'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que : $\forall\ (x, y) \in A,\ f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$.

2. f admet un maximum global sur A s'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que : $\forall\ (x, y) \in A,\ f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$.

3. f admet un extremum global sur A si elle admet un minimum ou un maximum global sur A.

Définition 3.2 (Extremum local)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall\ (x, y) \in A \cap B((x_0, y_0), r),\ f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y).$$

2. f admet un maximum local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall\ (x, y) \in A \cap B((x_0, y_0), r),\ f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y).$$

3. f admet un extremum local sur A si elle admet un minimum ou un maximum local sur A.

Définition 3.3 (Point critique)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Un point critique de f est un point $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Proposition 3.4 (Condition nécessaire d'extremum en un point)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si f admet un extremum en (x_0, y_0) (local ou global), alors (x_0, y_0) est un point critique.