

Chapitre 30

Fonctions de deux variables réelles

Dans tout ce chapitre, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .

1 Continuité

Définition 1.1 (Boule ouverte)

1. Une **boule ouverte** de \mathbb{R}^2 est un disque du plan de rayon strictement positif, privé du cercle extérieur.
2. La **boule ouverte de centre** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ **et de rayon** $r > 0$ est l'ensemble $B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$.

Définition 1.2 (Ouvert de \mathbb{R}^2)

Un *ouvert* de \mathbb{R}^2 est un sous-ensemble U de \mathbb{R}^2 tel que, $\forall (x, y) \in U, \exists r > 0, B((x, y), r) \subset U$.

Remarque.

Les ouverts de \mathbb{R}^2 sont les ensembles qui sont invariants par petits mouvement autour d'un de leurs éléments.

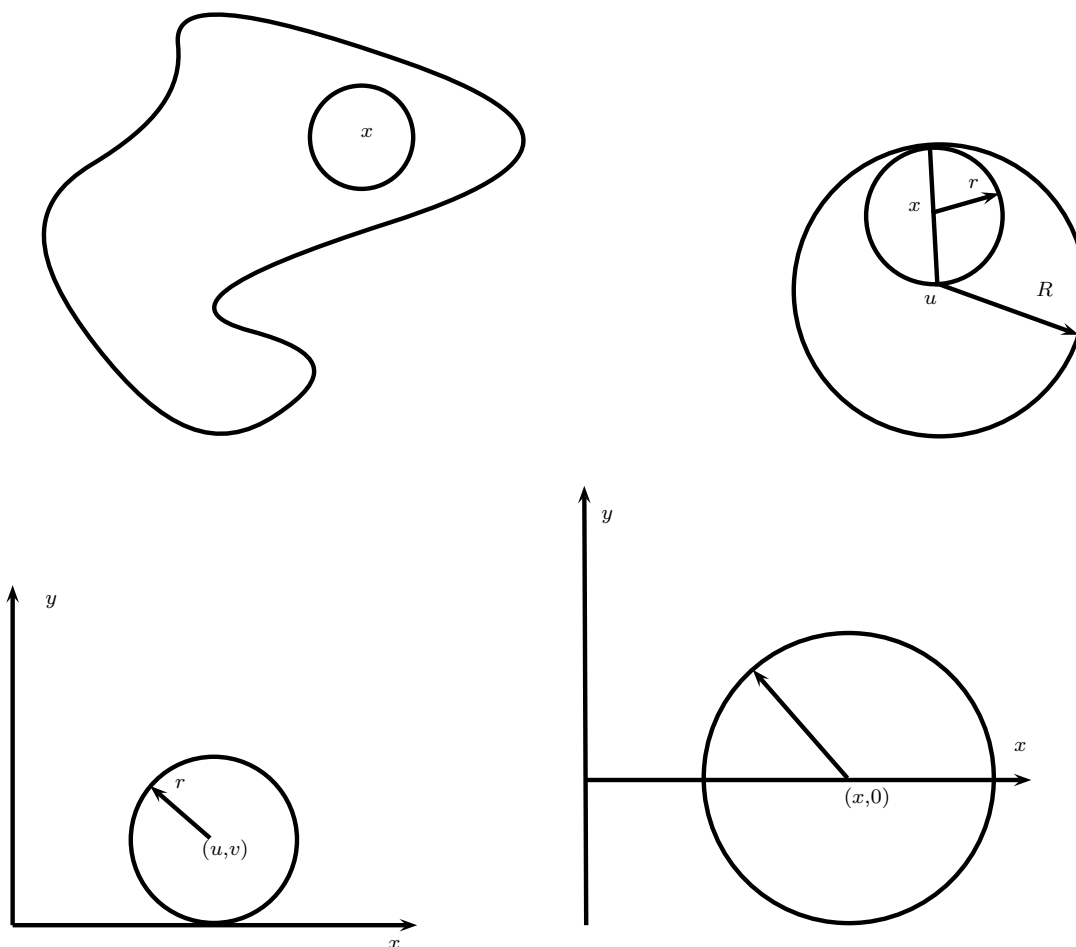
Exemples.

1. L'ensemble $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est un ouvert. En effet, si $(u, v) \in P$, soit $r = \min(u, v) > 0$. Soit alors $(x, y) \in B((u, v), r)$. Montrons que $(x, y) \in P$. En effet, on a

$$|x - u| \leq \|(x, y) - (u, v)\| < r,$$

donc $x > u - r \geq 0$. De même, $y > 0$ et $(x, y) \in P$ qui est bien un ouvert.

2. L'ensemble $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y \geq 0\}$ n'est pas un ouvert. En effet, si $x > 0$, on ne peut pas mettre de boule autour d'un point $(x, 0)$ complètement incluse dans Q .



Remarque.

La plupart du temps, on considérera des fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Dans tout ce paragraphe, A désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, i.e. une fonction de A dans \mathbb{R} .

Définition 1.3 (Continuité)

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. La fonction f admet une limite en (x_0, y_0) si

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \eta \implies |f(x, y) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\ell = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

2. Si $(x_0, y_0) \in A$, la fonction f est continue en (x_0, y_0) si elle admet une limite en (x_0, y_0) . Cette limite est alors nécessairement $f(x_0, y_0)$.
3. La fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .

Remarques.

1. La notion de limite est définie de la même manière que pour les fonctions à une variable réelle, en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$. En particulier, en cas d'existence, la limite est unique.
2. La fonction f tend vers 0 en (x_0, y_0) si et seulement si la fonction $|f|$ tend vers 0 en (x_0, y_0) .
3. Les sommes et produits de fonctions continues sont continues.

Exemples.

1. Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .
2. Les *applications affines* $(x, y) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) sont continues sur \mathbb{R}^2 .
3. La norme est une fonction continue!

4. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

admet 0 comme limite en $(0, 0)$. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2 \quad \text{car} \quad (|x| - |y|)^2 \geq 0,$$

donc si $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$|f(x, y)| \leq \frac{3x^2 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{4x^2 + 4y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 4\sqrt{x^2 + y^2} = 4\|(x, y)\|,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

5. La fonction g définie pour $(x, y) \neq (0, 0)$ par

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, on a

$$g(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \quad \text{si } t \neq 0,$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, t) = \frac{1}{2}.$$

Or, si $t \neq 0$, on a

$$g(t, 0) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = 0.$$

Si g admettait une limite, on aurait $0 = 1/2$: absurde.

2 Calcul différentiel

2.1 Dérivées partielles

Dans toute la suite de ce chapitre, U désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , $(x_0, y_0) \in U$ et f une fonction de U dans \mathbb{R} .

Définition 2.1 (Dérivées partielles)

1. La *première dérivée partielle* de f en (x_0, y_0) est, lorsqu'elle existe, la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$. On la note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
2. La *deuxième dérivée partielle* de f en (x_0, y_0) est, lorsqu'elle existe, la dérivée en y_0 de la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$. On la note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Définition 2.2

Les fonctions dérivées partielles de f sont, si elles existent, les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Remarque.

Dans la pratique, pour calculer les dérivées partielles, on "fixe" une des variables et on dérive par rapport à l'autre, puisqu'il s'agit de dériver des fonctions partielles.

Exemples.

1. Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x \cos(y) + xy$. Cette fonction admet des dérivées partielles en tout point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 . En effet, les fonctions $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont dérivables sur \mathbb{R} , et leur dérivée nous donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \cos(y_0) + y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -x_0 \sin(y_0) + x_0.$$

2. Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$. La fonction $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur \mathbb{R} si $y \neq 0$, et sur \mathbb{R}^* si $y = 0$ (la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0). De même, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur \mathbb{R} si $x \neq 0$, et sur \mathbb{R}^* si $x = 0$. La fonction f admet donc des dérivées partielles par rapport à x et y en tout $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 3y_0^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{3y_0}{\sqrt{x_0^2 + 3y_0^2}}.$$

3. Considérons $g(x, y) = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$. Alors g admet des dérivées partielles en tout point de son domaine de définition et Alors

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

2.2 Fonctions de classe C^1 **Définition 2.3 (Fonctions de classe C^1)**

La fonction f est de classe C^1 sur U si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si celles-ci sont continues sur U .

Proposition 2.4 (Espace vectoriel des fonctions de classe C^1)

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Théorème 2.5 (Développement limité d'ordre pour les fonctions de classe C^1)

Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur U et $(x_0, y_0) \in U$. Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$. Alors

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|).$$

Démonstration.

Elle est hors programme. ■

Remarques.

- Rappelons que $o(\|(h, k)\|)$ est une fonction $\varepsilon(h, k)$ telle que $\frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0$.
- L'idée est de faire une approximation linéaire au voisinage de (x_0, y_0) de la fonction

$$(h, k) \mapsto f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) :$$

une approximation est l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de (x_0, y_0) par

$$(h, k) \mapsto h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

- La surface d'équation $z = f(x, y)$ dans \mathbb{R}^3 (le "graphe" de la fonction f) admet un plan tangent (généralisation de la notion de tangente au graphe d'une fonction) : c'est la plan d'équation

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

C'est en fait le plan qui contient toutes les tangentes à toutes les courbes tracé sur la surface $z = f(x, y)$, en (x_0, y_0) .

Corollaire 2.6 (Continuité d'une fonction de classe C^1)

Une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur U est continue sur U .

Démonstration.

On utilise les notations du théorème 2.5 : lorsque (h, k) tend vers $(0, 0)$, le développement limité de f en (x_0, y_0) prouve que $f(x_0 + h, y_0 + k)$ tend vers $f(x_0, y_0)$, d'où la continuité de f . ■

2.3 Fonctions composées

Proposition 2.7 (Dérivée d'une fonction composée : règle de la chaîne)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U à valeurs dans \mathbb{R} , et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans U . La fonction $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et on a

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \times \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \times \varphi_2'(t).$$

Démonstration.

(Facultative) Soient $t, t_0 \in I$ avec $t \neq t_0$, et $(x_0, y_0) = \varphi(t_0) \in U$ et $(x, y) = \varphi(t) \in U$. Soit $(h, k) = (x, y) - (x_0, y_0) (= \varphi(t) - \varphi(t_0))$. D'après le théorème 2.5,

$$\begin{aligned} \frac{f \circ \varphi(t) - f \circ \varphi(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \left(h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|) \right) \\ &= \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{t - t_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{o(\|(h, k)\|)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0} = \varphi_1'(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{t - t_0} = \varphi_2'(t_0),$$

et $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2} \leq |h| + |k|$, donc

$$\frac{\|(h, k)\|}{|t - t_0|} \leq \left| \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0} \right| + \left| \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{t - t_0} \right|,$$

quantité qui reste bornée au voisinage de t_0 puisque tendant vers $|\varphi_1'(t_0)| + |\varphi_2'(t_0)|$, donc

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{o(\|(h, k)\|)}{t - t_0} \right) = 0,$$

d'où la proposition. ■

Méthode 2.8

Moyen mnémotechnique pour retenir cette formule. Avec $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ (i.e. $\varphi_1(t) = x(t)$ et $\varphi_2(t) = y(t)$), on a

$$(f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t),$$

ou plus court, en "oubliant" les variables,

$$(f \circ \varphi)' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Exemples.

- Si $f(x, y) = x \cos(y) + xy$ et $\varphi(t) = (\ln(t), e^t)$, on a

$$(f \circ \varphi)'(t) = (\cos(e^t) + e^t) \times \frac{1}{t} + (-\ln(t) \sin(e^t) + \ln(t)) \times e^t.$$

On peut également calculer directement la dérivée en déterminant $f \circ \varphi$, mais ce n'est pas la bonne méthode...

2. Si $f(x, y) = xe^y + y^2$ et $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, on a

$$(f \circ \varphi)'(t) = e^{\sin(t)} \times (-\sin(t)) + (\cos(t)e^{\sin(t)} + 2\sin(t)) \times \cos(t).$$

Proposition 2.9

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} , et f une fonction de classe C^1 sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} , telle que : $\forall (u, v) \in U, (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \in V$. Alors la fonction $g : (u, v) \mapsto f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ définie sur U admet des dérivées partielles en tout $(u, v) \in U$, et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

Démonstration.

On applique la proposition 2.7, une fois à la fonction $u \mapsto f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$, et une fois à la fonction $v \mapsto f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$.

En effet, fixons v , et on considère la fonction $h : u \mapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$, et on cherche la dérivée de $f \circ h$: c'est exactement la proposition précédente. ■

Méthode 2.10

Méthode mnémotechnique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{aligned}$$

et si on note $\varphi_1(u, v) = x(u, v)$ et $\varphi_2(u, v) = y(u, v)$, les formules deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

2.4 Gradient

Définition 2.11 (Gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in U$. Le gradient de f en (x_0, y_0) est le vecteur $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$.

Proposition 2.12 (Expression du développement limité à l'aide du gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} , et $(x_0, y_0) \in U$. Le développement limité de f en (x_0, y_0) à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|).$$

Démonstration.

C'est une simple écriture plus condensée : vérifiez-le! ■

Remarque.

La quantité $\langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle$ est d'autant plus grande que le cosinus entre les deux vecteurs est grand : le gradient est la direction dans laquelle la fonction croît le plus vite.

Proposition 2.13 (Règle de la chaîne avec le gradient)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U à valeurs dans \mathbb{R} , et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans U . Alors

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle.$$

Démonstration.

De même, c'est une simple écriture à vérifier. ■

Remarque.

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction f , c'est-à-dire que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la courbe $\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = \lambda\}$ admet pour normale $\nabla f(x, y)$ en tout point (x, y) où ce vecteur est non nul. En effet, si on a une courbe définie par $\varphi : I \rightarrow U$, et si de plus $f(\varphi(t)) = \lambda$ pour tout $t \in I$, alors $(f \circ \varphi)'(t) = 0$ pour tout t (dérivée d'une fonction constante), ce qui implique par la proposition 2.13, que

$$\langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = 0,$$

donc que le vecteur $\nabla f(\varphi(t))$ est orthogonal au vecteur tangent $\varphi'(t)$.

3 Application : recherche d'extremums

Définition 3.1 (Extremum global)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum global sur A s'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que : $\forall (x, y) \in A, f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.
2. f admet un maximum global sur A s'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que : $\forall (x, y) \in A, f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.
3. f admet un extremum global sur A si elle admet un minimum ou un maximum global sur A .

Définition 3.2 (Extremum local)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in A \cap B((x_0, y_0), r), f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

2. f admet un maximum local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in A \cap B((x_0, y_0), r), f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

3. f admet un extremum local sur A si elle admet un minimum ou un maximum local sur A .

Définition 3.3 (Point critique)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Un point critique de f est un point $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Remarque.

Autrement dit, un point tel que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Proposition 3.4 (Condition nécessaire d'extremum en un point)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Si f admet un extremum en (x_0, y_0) (local ou global), alors (x_0, y_0) est un point critique.

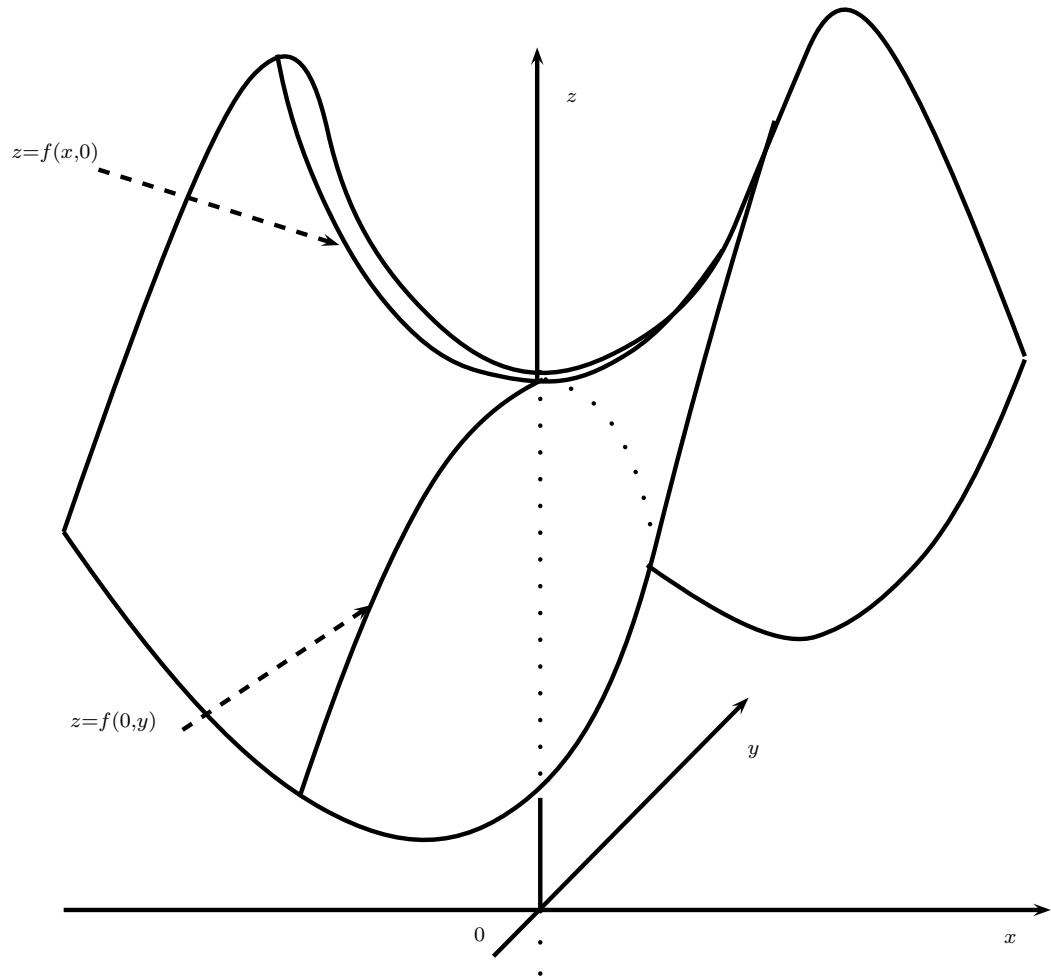
Démonstration.

Si (x_0, y_0) est un extremum pour f sur $B((x_0, y_0), r)$ où $r > 0$, x_0 est un extremum pour la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ sur l'intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$, donc sa dérivée s'annule en x_0 , i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

De même pour l'autre dérivée partielle. ■

Remarques.

1. Ce résultat n'est vrai que pour un ouvert de \mathbb{R}^2 (comme d'ailleurs le résultat pour les fonctions d'une variable réelle n'est vrai que sur un intervalle ouvert). En effet, la fonction f définie sur $[0, 1]^2$ par $f(x, y) = xy$ admet un maximum en $(1, 1)$ qui vaut 1, mais ses dérivées partielles ne sont pas nulles en $(1, 1)$.
2. Ce n'est (comme pour les fonctions d'une variable réelle) qu'une condition nécessaire, comme le prouve l'exemple de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$, dont le gradient est nul en $(0, 0)$, mais $f(x, 0) = x^2 > f(0, 0)$ si $x \neq 0$, et $f(x, y) = -y^2 < f(0, 0)$ si $y \neq 0$, donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum pour f : c'est un *point selle* ou un *point col*.



Exemple.

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$, dont les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x(x - 4), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y(y + 4),$$

nulles simultanément en $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -4)$, $(4, -4)$.

Or, $f(x, 0) = x^2(x - 6) < 0$ au voisinage de $x = 0$, et $f(0, y) = y^2(y + 6) > 0$ au voisinage de $y = 0$. Comme $f(0, 0) = 0$, ce point n'est pas un extremum : c'est un point selle.

L'étude en $(4, 0)$ nous amène à étudier

$$f(4 + X, Y) = -32 + X^2(6 + X) + Y^2(6 + Y)$$

(changement de variable $x = 4 + X, y = Y$), et on a $f(4 + X, Y) \geq -32$ au voisinage de $(X, Y) = (0, 0)$, donc $(4, 0)$ est un minimum (local).

De même, en $(0, -4)$,

$$f(X, Y - 4) = 32 + X^2(X - 6) + Y^2(Y - 6) \leq 32,$$

donc $(0, -4)$ est un maximum (local).

Enfin, l'étude en $(4, -4)$ donne

$$f(4 + X, -4) = X^2(X + 6),$$

qui prend des valeurs > 0 au voisinage de $X = 0$, et

$$f(4, Y - 4) = Y^2(Y - 6),$$

qui prend des valeurs < 0 au voisinage de $Y < 0$, donc $(4, -4)$ n'est pas un extremum : c'est un point selle.