Chapitre 30

Fonctions de deux variables réelles

Dans tout ce chapitre, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

1 Continuité

Définition 1.1 (Ouvert de $\mathbb{R}^2$)

Un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ tel que,

$$\forall\, x \in U,\ \exists\, r > 0,\ B(x,r) \subset U,$$

où $B(x,r) = \{z \in \mathbb{R}^2,\ \|z-x\| < r\}$ (disque centré en x) est la *boule ouverte* centrée en x.

Exemples.

1. Pour tout $R > 0$ et $u \in \mathbb{R}^2$, $B(u,R)$ est un ouvert. En effet, si $x \in B(u,R)$, posons $r = R - \|x-u\| > 0$. Si $y \in B(x,r)$ alors

$$\|y-u\| = \|y-x+x-u\| \leqslant \|y-x\| + \|x-u\| < r + \|x-u\| = R,$$

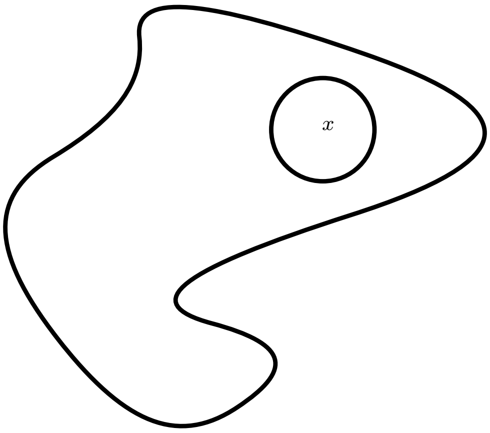
donc $y \in B(u,R)$ et $B(x,r) \subset B(u,R)$.

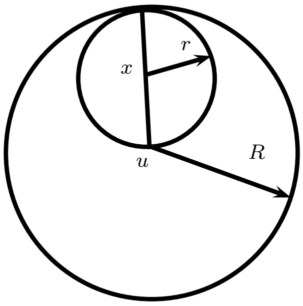
2. L'ensemble $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est un ouvert. En effet, si $(u,v) \in P$, soit $r = \min(u,v) > 0$. Soit alors $(x,y) \in B((u,v),r)$. Montrons que $(x,y) \in P$. En effet, on a

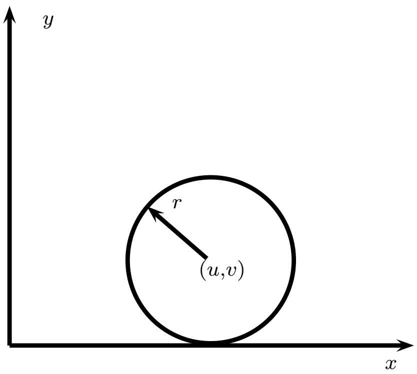
$$|x-u| \leqslant \|(x,y)-(u,v)\| < r,$$

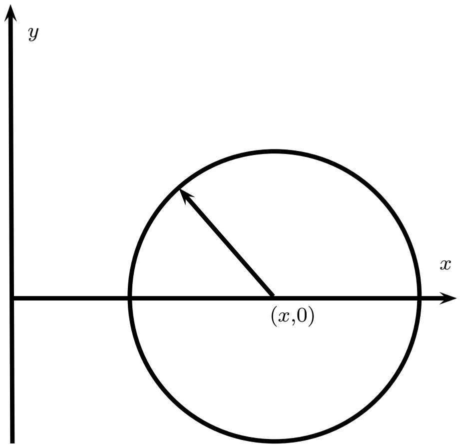
donc $x > u - r \geqslant 0$. De même, $y > 0$ et $(x,y) \in P$ qui est bien un ouvert.

3. L'ensemble $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ n'est pas un ouvert. En effet, si $x > 0$, on ne peut pas mettre de boule autour d'un point $(x,0)$ complètement incluse dans Q.









Remarque.

La plupart du temps, on considérera des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Dans tout ce paragraphe, A désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, *i.e.* une fonction de A dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 (Continuité)

Soit $a \in \mathbb{R}^2$.

1. La fonction f *admet une limite en* a si

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, z \in A,\ \|z - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(z) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\ell = \lim\limits_{z \to a} f(z)$.

2. Si $a \in A$, la fonction f est *continue en* a si elle admet une limite en a. Cette limite est alors nécessairement $f(a)$.

3. La fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

Remarques.

1. La notion de limite est définie de la même manière que pour les fonctions à une variable réelle, en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$. En particulier, en cas d'existence, la limite est unique.
2. La fonction f tend vers 0 en a si et seulement si la fonction $|f|$ tend vers 0 en a.
3. Les sommes et produits de fonctions continues sont continues.

Exemples.

1. Les fonctions $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

2. Les *applications affines* $(x,y) \longmapsto \alpha x + \beta y + \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

3. La norme est une fonction continue !

4. La fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$
admet 0 comme limite en $(0,0)$. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2 \quad \text{car} \quad (|x|-|y|)^2 \geqslant 0,$$
donc si $(x,y) \neq (0,0)$, on a
$$|f(x,y)| \leqslant \frac{3x^2+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{4x^2+4y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4\sqrt{x^2+y^2} = 4\|(x,y)\|,$$
ce qui prouve que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

5. La fonction g définie pour $(x,y) \neq (0,0)$ par
$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
n'admet pas de limite en $(0,0)$. En effet, on a
$$g(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \quad \text{si } t \neq 0,$$
donc
$$\lim_{t\to 0} g(t,t) = \frac{1}{2}.$$
Or, si $t \neq 0$, on a
$$g(t,0) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{t\to 0} g(t,0) = 0.$$
Si g admettait une limite, on aurait $0 = 1/2$: absurde.

2 Calcul différentiel

2.1 Dérivées partielles

Dans toute la suite de ce chapitre, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 (Dérivées partielles)

1. La *première dérivée partielle* de f en (x_0, y_0) est, lorsqu'elle existe, la dérivée en x_0 de la fonction $x \longmapsto f(x, y_0)$. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

2. La *deuxième dérivée partielle* de f en (x_0, y_0) est, lorsqu'elle existe, la dérivée en y_0 de la fonction $y \longmapsto f(x_0, y)$. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Définition 2.2

Les fonctions dérivées partielles de f sont, si elles existent, les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}.$$

Remarque.

Dans la pratique, pour calculer les dérivées partielles, on "fixe" une des variables et on dérive par rapport à l'autre, puisqu'il s'agit de dériver des fonctions partielles.

Exemples.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x\cos(y) + xy$. Cette fonction admet des dérivées partielles en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$. En effet, les fonctions $x \longmapsto f(x, y)$ et $y \longmapsto f(x, y)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et leur dérivée nous donne
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)) = \cos(y_0) + y_0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) = -x_0\sin(y_0) + x_0.$$

2. Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$. La fonction $x \longmapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $y \neq 0$, et sur $\mathbb{R}^*$ si $y = 0$ (la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0). De même, la fonction $y \longmapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $x \neq 0$, et sur $\mathbb{R}^*$ si $x = 0$. La fonction f admet donc des dérivées partielles par rapport à x et y en tout $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{{}_0x}{\sqrt{x_0^2 + 3y_0^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{3y_0}{\sqrt{x_0^2 + 3y_0^2}}.$$

3. Considérons $g(x, y) = \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) \mid x \leqslant 0\}$. Alors g admet des dérivées partielles en tout point de son domaine de définition et Alors
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}.$$

2.2 Fonctions de classe C^1

Définition 2.3 (Fonctions de classe C^1)

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si celles-ci sont continues sur U.

Proposition 2.4 (Espace vectoriel des fonctions de classe C^1)

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Théorème 2.5 (Développement limité d'ordre pour les fonctions de classe C^1)

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $(x_0, y_0) \in U$. Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$. Alors

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k\|).$$

Démonstration.

Elle est hors programme. ■

Remarques.

1. Rappelons que $o(\|(h, k\|)$ est une fonction $\varepsilon(h, k)$ telle que $\dfrac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$
2. L'idée est de faire une approximation linéaire au voisinage de (x_0, y_0) de la fonction

$$(h, k) \longmapsto f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \ :$$

une approximation est l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de (x_0, y_0) par

$$(h, k) \longmapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

3. La surface d'équation $z = f(x, y)$ dans $\mathbb{R}^3$ (le "graphe" de la fonction f) admet un plan tangent (généralisation de la notion de tangente au graphe d'une fonction) : c'est la plan d'équation

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

C'est en fait le plan qui contient toutes les tangentes à toutes les courbes tracé sur la surface $z = f(x, y)$, en (x_0, y_0).

Corollaire 2.6 (Continuité d'une fonction de classe C^1)

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U.

Démonstration.

On utilise les notations du théorème 2.5 : lorsque (h, k) tend vers $(0, 0)$, le développement limité de f en (x_0, y_0) prouve que $f(x_0 + h, y_0 + k)$ tend vers $f(x_0, y_0))$, d'où la continuité de f. ■

2.3 Fonctions composées

Proposition 2.7 (Dérivée d'une fonction composée : règle de la chaîne)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U. La fonction $f \circ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\forall\, t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \times \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \times \varphi_2'(t).$$

Démonstration.

(Facultative) Soient $t, t_0 \in I$ avec $t \neq t_0$, et $(x_0, y_0) = \varphi(t_0) \in U$ et $(x, y) = \varphi(t) \in U$. Soit $(h, k) = (x, y) - (x_0, y_0) (= \varphi(t) - \varphi(t_0))$. D'après le théorème 2.5,

$$\begin{aligned}\frac{f \circ \varphi(t) - f \circ \varphi(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|\right) \\ &= \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{t - t_0}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{o(\|(h, k)\|)}{t - t_0}.\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0} = \varphi_1'(t_0), \qquad \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{t - t_0} = \varphi_2'(t_0),$$

et $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2} \leqslant |h| + |k|$, donc

$$\frac{\|(h, k)\|}{|t - t_0|} \leqslant \left|\frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0}\right| + \left|\frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{t - t_0}\right|,$$

quantité qui reste bornée au voisinage de t_0 puisque tendant vers $|\varphi_1'(t_0)| + |\varphi_2'(t_0)|$, donc

$$\lim_{t \to t_0}\left(\frac{o(\|(h, k))\|}{t - t_0}\right) = 0,$$

d'où la proposition. ■

Méthode 2.8

Moyen mnémotechnique pour retenir cette formule. Avec $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ (*i.e.* $\varphi_1(t) = x(t)$ et $\varphi_2(t) = y(t)$), on a

$$(f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t),$$

ou plus court, en "oubliant" les variables,

$$(f \circ \varphi)' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Exemples.

1. Si $f(x, y) = x\cos(y) + xy$ et $\varphi(t) = (\ln(t), e^t)$, on a

$$(f \circ \varphi)'(t) = (\cos(e^t) + e^t) \times \frac{1}{t} + (-\ln(t)\sin(e^t) + \ln(t)) \times e^t.$$

On peut également calculer directement la dérivée en déterminant $f \circ \varphi$, mais ce n'est pas la bonne méthode...

2. Si $f(x,y)=xe^y+y^2$ et $\varphi(t)=(\cos(t),\sin(t))$, on a

$$(f\circ\varphi)'(t)=e^{\sin(t)}\times(-\sin(t))+(\cos(t)e^{\sin(t)}+2\sin(t))\times\cos(t).$$

Proposition 2.9

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que : $\forall\ (u,v)\in U,\ (\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))\in V$. Alors la fonction $g:(u,v)\longmapsto f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$ définie sur U admet des dérivées partielles en tout $(u,v)\in U$, et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))\times\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))\times\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))\times\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))\times\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)$$

Démonstration.

On applique la proposition 2.7, une fois à la fonction $u\longmapsto f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$, et une fois à la fonction $v\longmapsto f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$.

En effet, si v est fixé, avec $h:u\longmapsto f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$, on cherche la dérivée de $f\circ h$: c'est exactement la proposition précédente. ∎

Méthode 2.10

Méthode mnémotechnique :

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}$$

et si on note $\varphi_1(u,v)=x(u,v)$ et $\varphi_2(u,v)=y(u,v)$, les formules deviennent :

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

2.4 Gradient

Définition 2.11 (Gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^2$, et $(x_0,y_0)\in U$. La gradient de f en (x_0,y_0) est le vecteur $\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

Proposition 2.12 (Expression du développement limité à l'aide du gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(x_0,y_0)\in U$. Le développement limité de f en (x_0,y_0) à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\langle\nabla f(x_0,y_0)\,,(h,k)\rangle+o(\|(h,k)\|).$$

Démonstration.

C'est une simple écriture plus condensée : vérifiez-le ! ∎

Remarque.
La quantité $\langle \nabla f(x_0, y_0)\,, (h, k)\rangle$ est d'autant plus grande que le cosinus entre les deux vecteurs est grand : le gradient est la direction dans laquelle la fonction croit le plus vite.

Proposition 2.13 (Règle de la chaine avec le gradient)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U. Alors

$$\forall\, t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = \left\langle \nabla f(\varphi(t))\,, \varphi'(t) \right\rangle.$$

Démonstration.

De même, c'est une simple écriture à vérifier. ∎

Remarque.
Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction f, c'est-à-dire que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la courbe $\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = \lambda\}$ admet pour normale $\nabla f(x, y)$ en tout point (x, y) où ce vecteur est non nul. En effet, si on a une courbe définie par $\varphi : I \longrightarrow U$, et si de plus $f(\varphi(t)) = \lambda$ pour tout $y \in U$, alors $(f \circ \varphi)'(t) = 0$ pour tout t (dérivée d'une fonction constante), ce qui implique par la proposition 2.13, que

$$\left\langle \nabla f(\varphi(t))\,, \varphi'(t) \right\rangle = 0,$$

donc que le vecteur $\nabla f(\varphi(t))$ est orthogonal au vecteur tangent $\varphi'(t)$.

3 Application : recherche d'extremums

Définition 3.1 (Extremum global)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum global sur A s'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que : $\forall\, (x, y) \in A,\ f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$.
2. f admet un maximum global sur A s'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que : $\forall\, (x, y) \in A,\ f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$.
3. f admet un extremum global sur A si elle admet un minimum ou un maximum global sur A.

Définition 3.2 (Extremum local)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall\, (x, y) \in A \cap B((x_0, y_0), r),\ f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y).$$

2. f admet un maximum local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall\,(x,y) \in A \cap B((x_0,y_0),r),\ f(x_0,y_0) \geqslant f(x,y).$$

3. f admet un extremum local sur A si elle admet un minimum ou un maximum local sur A.

Définition 3.3 (Point critique)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Un point critique de f est un point $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

Remarque.

Autrement dit, un point tel que $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$.

Proposition 3.4 (Condition nécessaire d'extremum en un point)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si f admet un extremum en (x_0, y_0) (local ou global), alors (x_0,y_0) est un point critique.

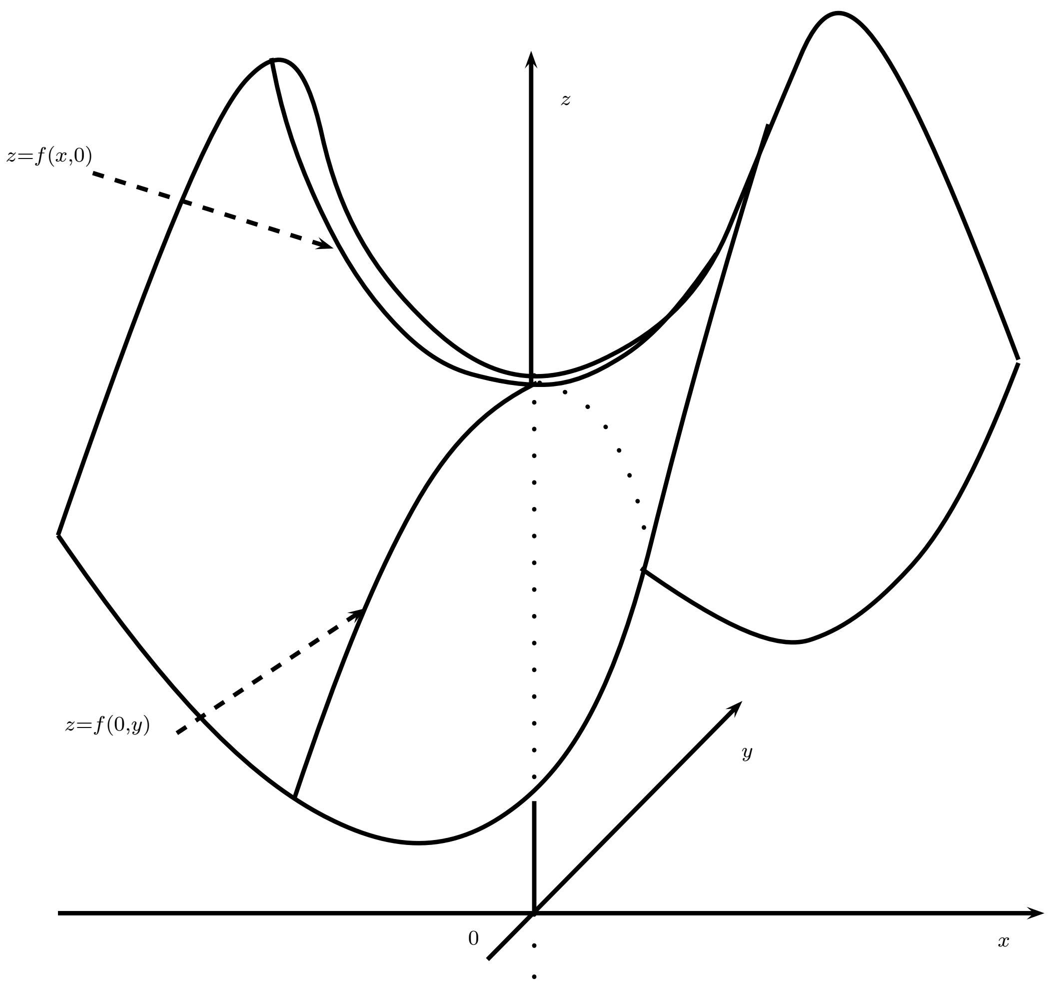
Démonstration.

Si (x_0,y_0) est un extremum pour f sur $B((x_0,y_0),r)$ où $r > 0$, x_0 est un extremum pour la fonction $x \longmapsto f(x,y_0)$ sur l'intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$, donc sa dérivée s'annule en x_0, *i.e.* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$.

De même pour l'autre dérivée partielle. ∎

Remarques.

1. Ce résultat n'est vrai que pour un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (comme d'ailleurs le résultat pour les fonctions d'une variable réelle n'est vrai que sur un intervalle ouvert). En effet, la fonction f définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = xy$ admet un maximum en $(1,1)$ qui vaut 1, mais ses dérivées partielles ne sont pas nulles en $(1,1)$.
2. Ce n'est (comme pour les fonctions d'une variable réelle) qu'une condition nécessaire, comme le prouve l'exemple de la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$, dont le gradient est nul en $(0,0)$, mais $f(x,0) = x^2 > f(0,0)$ si $x \neq 0$, et $f(x,y) = -y^2 < f(0,0)$ si $y \neq 0$, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum pour f : c'est un *point selle* ou un *point col.*



Exemple.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$, dont les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x(x-4), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y(y+4),$$

nulles simultanément en $(0,0), (4,0), (0,-4), (4,-4)$.

Or, $f(x,0) = x^2(x-6) < 0$ au voisinage de $x = 0$, et $f(0,y) = y^2(y+6) > 0$ au voisinage de $y = 0$. Comme $f(0,0) = 0$, ce point n'est pas un extremum : c'est un point selle.

L'étude en $(4,0)$ nous amène à étudier

$$f(4+X,Y) = -32 + X^2(6+X) + Y^2(6+Y)$$

(changement de variable $x = 4+X, y = Y$), et on a $f(4+X,Y) \geqslant -32$ au voisinage de $(X,Y) = (0,0)$, donc $(4,0)$ est un minimum (local).

De même, en $(0,-4)$,

$$f(X,Y-4) = 32 + X^2(X-6) + Y^2(Y-6) \leqslant 32,$$

donc $(0, -4)$ est un maximum (local).

Enfin, l'étude en $(4, -4)$ donne

$$f(4 + X, -4) = X^2(X + 6),$$

qui prend des valeurs > 0 au voisinage de $X = 0$, et

$$f(4, Y - 4) = Y^2(Y - 6),$$

qui prend des valeurs < 0 au voisinage de $Y < 0$, donc $(4, -4)$ n'est pas un extremum : c'est un point selle.