DM 13 - Variable aléatoire - Analyse

2025-2026

Exercice 1 : Développements limités et bijection

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

1. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Précisez $f^{-1}(0)$.
2. Déterminez le $DL_5(0)$ de f.
3. L'objectif est de présenter une méthode, générale, pour calculer le DL_5 en 0 de f^{-1}, sans calculer pour autant f^{-1} de manière explicite.
   (a) Justifiez (sans chercher à le calculer pour le moment) que f^{-1} admet aussi un développement limité d'ordre 5 en 0, de la forme
   $$f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5)$$
   (b) Justifiez qu'on peut substituer dans l'expression précédente x par $f(x)$ et en déduire un développement limité à l'ordre 5 de $f^{-1}(f(x))$, en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_5$.
   (c) Utiliser l'unicité du DL_5 de $f^{-1}(f(x))$ pour donner une relation entre les coefficients a_i, et en déduire l'expression du $DL_5(0)$ de f^{-1}.
4. Utiliser le même raisonnement pour donner le $DL_5(0)$ de la bijection réciproque de
   $$g : x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x)$$

1. Par composition et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} > 0$$
   donc f est strictement croissante, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et que f est continue, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
   Ainsi, on a bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Par ailleurs, $f(0) = 0$, donc $f^{-1}(0) = 0$.
2. Comme on multiplie par x, un $DL_4(0)$ de e^{x^2} va suffire. Comme $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$, on peut substituer dans le DL de exp et on a :
   $$e^{x^2} \underset{0}{=} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
   d'où
   $$f(x) \underset{0}{=} x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$
3. (a) Comme f est bijective et de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ également. Par Taylor Young, elle admet donc un développement limité à tout ordre, et d'ordre 5 en particulier.
   De plus, comme $f(0) = 0$, on a $0 = f^{-1}(0)$ et donc le coefficient d'ordre 0 vaut 0.

   Remarquons aussi qu'on peut déjà affirmer que a_2 et a_4 valent 0, car on peut montrer que f^{-1} est impaire :
   En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique $x \in R$ tel que $f(x) = y$ (en fait, $x = f^{-1}(y)$) et on a $f(-x) = -f(x)$, donc $-y = f(-x)$, c'est à dire $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$.
   Ainsi, f^{-1} est bien impaire.
   (b) La fonction f est continue en 0, avec $f(0) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et on a donc
   $$f^{-1}(f(x)) = a_1(f(x))^2 + a_3f(x)^3 + a_5f(x)^5 + o(f(x)^5)$$
   soit, en substituant par le DL_5 de f :
   $$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= a_1(x + x^3 + \frac{x^5}{2}) + a_3(x^3 + 3x^5) + a_5x^5 + o(x^5) \\ &= a_1x + (a_1 + a_3)x^3 + (\frac{1}{2}a_1 + 3a_3 + a_5)x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$
   (c) Comme $f^{-1}(f(x)) = x$ par unicité du DL, on en déduit que
   $$a_1 = 1, a_1 + a_3 = 0 \text{ et } a_1 + 3a_3 + a_5 = 0$$

d'où $a_1 = 1$, $a_3 = -1$ et $a_5 = \dfrac{5}{2}$, et finalement

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$$

4. Remarquons déjà que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $g'(x) = \text{ch}(x) + x\,\text{sh}(x)$.
   Si $x \geq 0$, alors $\text{sh}(x) \geq 0$ et, si $x \leq 0$, $\text{sh}(x) \leq 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x\,\text{sh}(x) \geq 0$. Comme $\text{ch}(x) \geq 1$, on a $g'(x) \geq \text{ch}(x) > 0$ et donc g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (les limites sont immédiates).
   Enfin, g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ également, puisque bijection réciproque d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ don la dérivée ne s'annule pas.
   On procède ensuite de la même façon :

$$g(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 + o(x^5)$$

   On a $g^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$ puisque g^{-1} est impaire, comme g.
   Comme $g(x) = 0$, on peut substituer ce qui donne

$$x = a_1x + (\frac{1}{2}a_1 + a_3)x^3 + (\frac{1}{24} + \frac{3}{2}a_3 + a_5)x^5 + o(x^5)$$

   Et au final :

$$g(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{17}{24}x^5 + o(x^5)$$

Exercice 2 :

Un couple de lions chasse des gazelles et des zèbres pour les repas de toute la famille.
En famille moderne, le lion accompagne la lionne à la chasse, et le couple est particulièrement efficace : chaque chasse se termine soit par la capture d'un zèbre, avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, soit par la capture d'une gazelle, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Le couple ne revient donc jamais bredouille, et les chasses sont supposées indépendantes.

Chaque repas de la famille est ainsi composé d'une gazelle ou d'un zèbre, et on suppose la composition d'un repas indépendante de celle des repas précédents (puisque les chasses sont indépendantes...).

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose les événements :

G_i : "Le i-ème repas est constitué d'une gazelle"
Z_i : l'événement "le $i$ème repas est constitué d'un zèbre".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe n repas de la famille.
   Soit X le nombre de fois qu'une gazelle a été consommée au cours des n repas.
   Quelle est la loi de X, son espérance et sa variance ?
2. Les lionceaux ont besoin de variété dans les repas et n'aime pas manger deux fois de suite la même chose. On s'intéresse donc maintenant à la première fois où la famille consomme deux fois de suite des gazelles (on pourrait faire de même avec les zèbres évidemment...).
   (a) Soit A l'événement "les deux premiers repas sont constitués de gazelles". Déterminez $P(A)$.
   (b) Calculez la probabilité de l'événement B : "le premier repas était constitué d'un zèbre, et les deux suivants de gazelles."
   (c) Soit C l'événement :"au cours des 4 premiers repas, la première fois que le repas "gazelle" s'est répété est lors des 3-ème et 4-ème repas.". Calculer $P_{G_1}(C)$ et $P_{Z_1}(C)$. En deduire $P(C)$.
3. Soit Y la variable aléatoire donnant le numero du repas où, pour la première fois, la famille a mangé deux gazelles à deux repas consécutifs.
   Par exemple si la séquence de repas est $G_1Z_2Z_3G_4Z_5G_6G_7Z_8G_9Z_{10}G_{11}G_{12}$, alors $Y = 7$.
   (a) Que valent $P(Y = 2)$, $P(Y = 3)$ et $P(Y = 4)$?
   (b) Pour tout $n \geq 2$, justifiez "en français" que

$$P_{Z_1}(Y = n+2) = P(Y = n+1) \text{ et } P_{G_1}(Y = n+2) = \frac{1}{3}P(Y = n)$$

   (c) Pour tout $n \geq 2$, On pose $u_n = P(Y = n)$. A l'aide du système complet (Z_1, G_1), montrez que $\forall n \geq 2$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$

   (d) En déduire $P(Y = n)$.

1. Les repas étant supposés indépendants, il s'agit ici d'une répétition d'expériences de Bernoulli, dont on compte les succès (ici : manger une gazelle). La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)}$$

   D'après le cours, $\boxed{E(X) = \dfrac{2n}{3} \text{ et } V(X) = \dfrac{2n}{9}}$.
2. (a) Avec les notations proposées, $A = G_1 \cap G_2$, et par indépendance, $P(A) = P(G_1)P(G_2) = \dfrac{4}{9}$.

(b) De même, $B = Z_1 \cap G_2 \cap G_3$ et, toujours via l'indépendance, $P(B) = \frac{4}{27}$.

(c) A partir de la formule, on a $P_{G_1}(C) = \frac{P(G_1 \cap C)}{P(G_1)} = \frac{P(G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4)}{P(G_1)} = P(Z_2 \cap G_3 \cap G_4) = \frac{4}{27}$. On peut aussi raisonner en considérant que cela revient à "décaller" l'expérience et donc à revenir à l'événement B.

De même, $P_{Z_1}(C) = \frac{4}{27}$, et d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le s.c.e. (G_1, Z_1), on a

$$\boxed{P(C) = \frac{1}{3}\frac{4}{27} + \frac{2}{3}\frac{4}{27} = \frac{4}{27}}$$

3. (a) Comme $(Y = 2) = A$, $(Y = 3) = B$ et $(Y = 4) = C$, on a $\boxed{P(Y = 2) = \frac{4}{9}, \text{ et } P(Y = 3) = P(Y = 4) = \frac{4}{27}}$.

(b) Si on sait que Z_1 a eu lieu, tout se passe comme si on recommençait. Ainsi avoir la répétition au $n + 2$-ème repas sachant que Z_1 a eu lieu est comme avoir la répétition au $n + 1$ eme repas en partant du début, d'où $P_{Z_1}(Y = n + 2) = P(Y = n + 1)$.

D'autre part avoir $(Y = n + 2)$ sachant G_1 implique qu'au deuxième repas on a eu un zebre, puis que n repas plus tard a eu lieu la répétition, d'où, par indépendance des événements, $P_{G_1}(Y = n + 2) = P(Z_2)P(Y = n) = \frac{1}{3}P(Y = n)$.

(c) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événement $\{G_1, Z_1\}$ et ainsi

$$P(Y = n+2) = P(G_1)P_{G_1}(Y = n+2)+P(Z_1)P_{Z_1}(Y = n+2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}P(Y = n)+\frac{1}{3}P(Y = n+1)$$

avec les notations proposées, ceci donne

$$\boxed{u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n}$$

(d) (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, de polynome caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9}$, et dont les racines sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Ainsi, il existe A et B réels tels que $u_n = A(-\frac{1}{3})^n + B(\frac{2}{3})^n$ et à partir de u_2 et u_3, on trouve $A = \frac{4}{3}$ et $B = \frac{2}{3}$ à partir de u_2 et u_3.