

SUITES ET SÉRIES
Épreuves orales

I. SÉRIES NUMÉRIQUES

1 CCINP MP (exercices 6, 7 et 8)

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-\alpha n}}{n} \text{ (discuter selon } \alpha \in \mathbb{R})$$

2 CCINP MP (exercice 5)

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas** $\alpha \leq 0$

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas** $\alpha > 0$

Étudier la nature de la série.

Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

3 CCINP

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et une suite de réels u_n strictement positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.

2. On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^\alpha u_n$.

Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.

Montrer qu'il existe un réel A non nul tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.

Étudier la convergence de $\sum u_n$.

3. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que sa somme vaut $u_0 \frac{b-1}{b-1-a}$.

4 Mines-Ponts

Étudier en fonction de $a > 0$ la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n^a}{\prod_{p=1}^n (1+a^p)}$.

5 Mines-Ponts

Étudier la convergence de la série de terme général $U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha + (n-p)^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

6 CCINP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln n$.

Montrer qu'il existe $\alpha < 0$ tel que $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

En déduire que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge puis que la suite (a_n) converge.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\sqrt{n}u_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}a_n + \sum_{k=1}^n w_k$ où w_k est le terme d'une série convergente.

En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

4. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$.

Montrer que la suite (v_n) est convergente et que sa limite est nulle si et seulement si $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

7 Mines-Ponts

Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi\sqrt{n^2 + 2n + 2})$.

8 Centrale

1. Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction k -lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f possède un unique point fixe.

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$.

Étudier la nature de la série $\sum (u_n - 1)$.

9 ESPCI

Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge.

10 ENS

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On suppose que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et que la série de terme général b_n est divergente.

On suppose que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on note s sa limite.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

Montrer que la suite $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s .

11 ENS

1. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
On suppose que $\sum b_n$ converge. Montrer que $\sum a_n$ converge.
2. Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que :
a) si $\ell > 1$ alors $\sum a_n$ converge, b) si $\ell < 1$ alors $\sum a_n$ diverge, c) si $\ell = 1$ alors les deux cas sont possibles.
3. Soit $a > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$.
Étudier la convergence de $\sum a_n$.

II. SUITES DE FONCTIONS

12 CCINP MP (exercice 9)

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

13 CCINP MP (exercice 10)

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

14 CCINP

Soit $a > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$, puis sur $[0, \alpha]$ où $\alpha \in [0, 1[$.

15 Centrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose $u_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (1+x^{2^k})$.

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $] -1, 1[$ et préciser sa limite simple.

III. SÉRIES DE FONCTIONS

16 CCINP MP (exercice 8)

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
2. Étudier la convergence normale sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

17 Mines-Télécom

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $g_n(x) = \sin x (\cos x)^n$.

1. Étudier les variations de g_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto x g_n(x)$.
3. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

18 Mines-Ponts

On fixe $\alpha > 0$. On pose $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto \sin^n x \cos^\alpha x$.

Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ sur I .

19 CCINP

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}. \end{array}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

On pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. (a) La convergence est-elle normale sur \mathbb{R}_+ ?
 (b) Montrer que pour tout $a > 0$, la série converge normalement sur $[a, +\infty[$.
 En déduire que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(x) - R_{2n}(x) \geq \frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$.
 (b) En déduire que $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

4. On admet (ε) :

$$\forall x > 0, 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq S(x) \leq 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}.$$

Montrer que S n'est pas continue en 0.

5. Démontrer (ε) .

20 CCINP

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \frac{\alpha^n}{n!} \cos(nx)$ et $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Donner le développement en série entière de \exp et son rayon de convergence.
2. Montrer que la fonction U est bien définie sur \mathbb{R} .
3. Montrer que la fonction U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (sans calculer U).
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$U(x) = \exp(\alpha \cos(x)) \cos(\alpha \sin(x)).$$

5. On pose $V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
Montrer que V est définie sur \mathbb{R} et calculer V .
6. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)U(x)dx$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
7. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

21 CCINP MP (exercice 14)

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx$ et en déduire la valeur de cette somme.

22 Mines-Ponts

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

IV. SÉRIES ENTIÈRES

23 CCINP, Centrale, CCINP MP (exercice 20)

1. Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \cos(n)x^n, \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+1}, \quad \sum \ln(n)x^n.$$

2. Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 3n + 1}{n!} x^n$ et calculer sa somme.
3. Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$ et calculer sa somme.

24 CCINP MP (exercice 24)

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
(b) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et déterminer $f^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

25 Mines-Télécom

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq n+1$ et donner le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.

2. Pour tout $x \in]-R, R[$, on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a $(2-x)S'(x) - 2S(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

3. Proposer une méthode permettant de déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

26 CCINP

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \exp(\exp(x) - 1)$.

On admet le développement limité en 0 suivant : $\varphi(x) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.

1. Calculer $\varphi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. On définit la suite (P_n) par : $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k$.

Calculer P_1 , P_2 et P_3 .

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \leq n!$.

4. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$.

Montrer que le rayon de convergence R de f est différent de 0.

5. Prouver que pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = e^x f(x)$.

6. En déduire le développement en série entière de φ .

27 Mines-Ponts

1. Développer la fonction arccosinus en série entière sur $] - 1, 1[$.
2. Ce développement est-il valable sur $[-1, 1]$?

28 Mines-Ponts

Pour tout $x \in [-1, 1]$, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ et qu'elle est développable en série entière.

V. SUITES NUMÉRIQUES

29 CCINP

On donne $u_0 \in] - 1, 0[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$ et montrer que pour tout $x \in] - 1, 0[$, $f(x) \in] - 1, 0[$.
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in] - 1, 0[$ puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge et donner sa somme en fonction de u_0 .
(b) Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$.
(a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ .
(b) On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \ell$.
En déduire un équivalent de u_n puis la nature de la série $\sum u_n$.
(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \ell$ (théorème de Cesàro).

30 Mines-Télécom, Mines-Ponts

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Prouver la convergence de cette suite et donner sa limite.
2. En étudiant $u_{n+1} - u_n$, étudier la convergence de la série $\sum u_n^3$.
3. Donner un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.
Indication : On pourra commencer par chercher un réel α tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ converge vers une limite non nulle puis utiliser le théorème de Cesàro.

31 CCINP

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n =] - \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n[$.

On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n .

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de \tan au voisinage de 0.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique x_n dans I_n tel que $f(x_n) = 0$.
(b) Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \arctan(x_n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.
(b) Justifier que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) \sim y_n - \frac{\pi}{2}$.
(c) Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{x_n \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) - 1}{x_n + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right)}$.
4. Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que :

$$x_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$