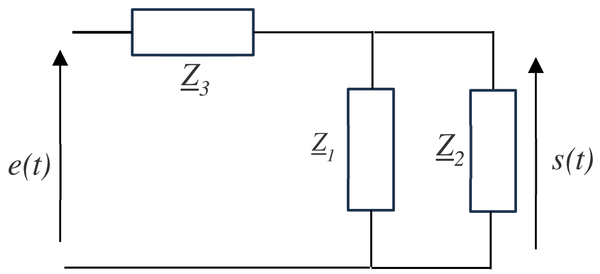
1.5 Filtres passifs-Exercice 18

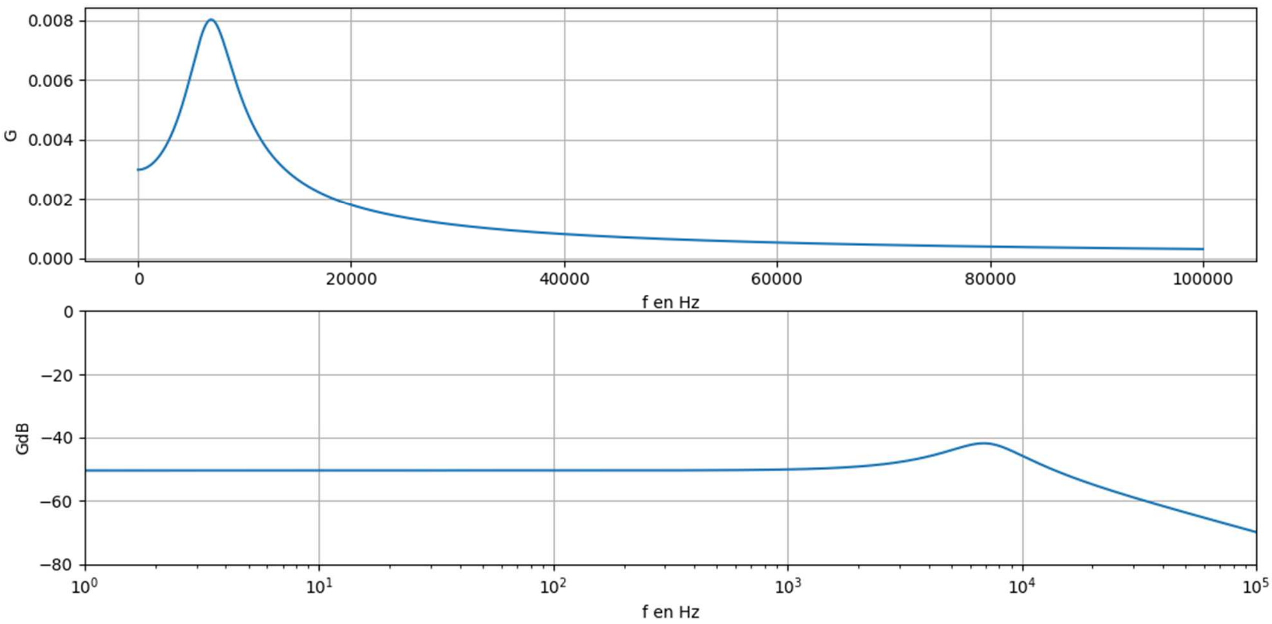
Les trois dipôles du circuit ci-contre sont :

- Une résistance R = 1 kΩ
- Un condensateur de capacité C
- Une bobine d'inductance L et de résistance r << R

On a : $e(t) = Ecos(2\pi ft)$ où $E = 10\ V$
$s(t) = Scos(2\pi ft + \varphi)$



On donne les courbes du gain et du gain en décibel.



1-Déterminer la nature du filtre. Quel est le dipôle d'impédance $\underline{Z_3}$?

2-Déterminer la fonction de transfert et l'écrire sous la forme : $\underline{H} = H_0 \frac{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$. Identifier H_0, Q, ω_0 et ω_1.

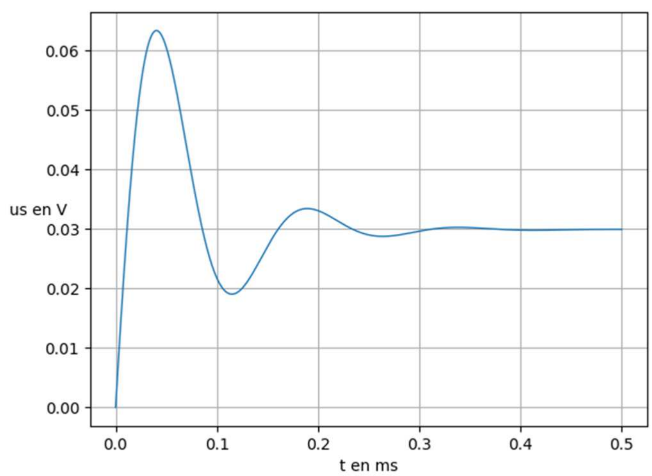
3-A partir des courbes, déterminer les valeurs de r, L et C.

On impose au même circuit un échelon de tension e(t) = E = 10 V. Le condensateur est initialement non chargé. La tension s(t) a l'allure ci-contre.

4-Déterminer l'équation différentielle dont s(t) est solution.

5-Déterminer la solution s(t) et vérifier l'accord avec la courbe ci-contre.

.



1.5 Filtres passifs-Exercice 18

1-Filtre passe-bas d'ordre 2 car on observe une résonance.

$\underline{Z}_3$ ne peut pas être le condensateur car la sortie serait nulle en basse fréquence (condensateur équivalent à un interrupteur ouvert).

$\underline{Z}_3$ ne peut pas être la bobine car la sortie serait presque égale à l'entrée en basse fréquence (bobine équivalente à sa faible résistance r, donc presque équivalente à un fil).

Donc $\underline{Z}_3$ est la résistance R.

2-On pose : $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{r+jL\omega} + jC\omega$ On a alors par un diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq}+\underline{Z}_3} = \frac{1}{1+\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_{eq}}}$

Donc : $\underline{H} = \frac{1}{1+R(\frac{1}{r+jL\omega}+jC\omega)} = \frac{r+jL\omega}{r+jL\omega+R+jrRC\omega-LCR\omega^2} = \frac{r}{r+R}\frac{1+j\frac{L\omega}{r}}{1+j\frac{L+rRC}{r+R}\omega-\frac{LCR}{r+R}\omega^2}$

Soit : $\underline{H} = H_0\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ avec : $\boxed{H_0 = \frac{r}{r+R}}$ $\boxed{\omega_1 = \frac{r}{L}}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{r+R}{LCR}}}$ $\boxed{Q = \frac{\sqrt{(R+r)RLC}}{L+rRC}}$

3-Le gain a fréquence nulle est H_0, on lit : $H_0 = 0{,}003$ d'où : $r \approx 3\ \Omega$ << R

On a alors : $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{1}{LC}}$ $Q = R\frac{\sqrt{LC}}{L+rRC}$

Le gain est : $G = |\underline{H}| = H_0\frac{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$

Le gain sera maximal pour $\omega \approx \omega_0$ et vaudra alors : $G_{max} \approx QH_0\frac{\omega_0}{\omega_1}$

En remplaçant ω_0 et Q par leur expression : $G_{max} \approx H_0\frac{R}{r}\frac{L}{L+rRC} \approx \frac{L}{L+rRC}$

On lit sur la courbe : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 7000$ Hz et $G_{max} \approx 0{,}008$

On a donc deux équations : $LC = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2}$ et $G_{max} = \frac{L}{L+rRC}$ pour les deux inconnues L et C.

On en déduit : $L \approx \frac{\sqrt{rRG_{max}}}{2\pi f_0}$ et $C \approx \frac{1}{2\pi f_0\sqrt{rRG_{max}}}$ A.N : $L \approx 0{,}1$ mH et $C \approx 5\ \mu$F

4-On a : $\left(1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\underline{s} = (1+j\frac{\omega}{\omega_1})\underline{e}$

En notation réelle : $s + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2} = e + \frac{1}{\omega_1}\frac{de}{dt}$ soit : $\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E}$

5-Discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right) < 0$ car $Q \approx 1{,}5$

Solution : $s(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[Acos\omega t + Bsin\omega t] + E$ avec la pseudo-pulsation : $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

A $t = 0$: $s(0) = 0$ car condensateur non chargé => $A = -E$

$i_L(0^+) = 0$ (continuité de l'intensité dans une bobine), donc $i_C(0^+) = i_R(0^+)$ (loi des nœuds)

Soit : $C\frac{ds}{dt}(0^+) = \frac{E}{R}$ => $C\left[-\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega\right] = \frac{E}{R}$ => $B = \frac{E}{RC\omega} - \frac{\omega_0}{2Q\omega}E$

Finalement : $\boxed{s(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[-Ecos\omega t + (\frac{E}{RC\omega} - \frac{\omega_0}{2Q\omega}E)sin\omega t\right] + E}$

Accord avec la courbe :

- $s(0) = 0$ est bien vérifiée
- $\frac{ds}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC} = 2000$ V.s^{-1} on lit sur la courbe $\frac{ds}{dt}(0^+) \approx \frac{0{,}04}{0{,}02.10^{-3}} = 2000$ V.s^{-1}
- $Q = 1{,}5$ et on observe bien entre une et deux oscillations notables

---