2.6 Forces centrales-Exercice 15

Un satellite en orbite circulaire autour de la Terre est frappé par des débris de telle manière que sa trajectoire est décalée avec un angle α en direction de la Terre et que sa vitesse en norme est inchangée.

a-Montrer que la trajectoire est elliptique et déterminer le demi-grand axe.

b-Déterminer les angles α pour lesquels le satellite s'écrase sur la Terre.

---

a-• Généralités :

La conservation du moment cinétique pour un mouvement à force centrale donne : $C = r^2\dot{\theta}$

L'énergie mécanique est constante et s'écrit :

$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] - \frac{GmM_T}{r} = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right] - \frac{GmM_T}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$

Avec l'énergie potentielle effective : $E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm\ \ _T}{r}$

- Sur la trajectoire initiale circulaire de rayon R, le satellite a la vitesse $v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$

  => moment cinétique $L_0 = mRv_0$ et constante des aires $C_0 = \frac{L_0}{m} = Rv_0$

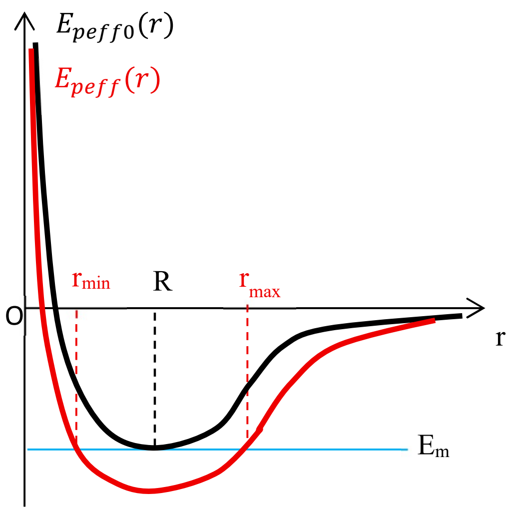
  => énergie potentielle effective $E_{peff0}(r) = \frac{1}{2}m\frac{R^2v_0^2}{r^2} - \frac{GmM_T}{r}$

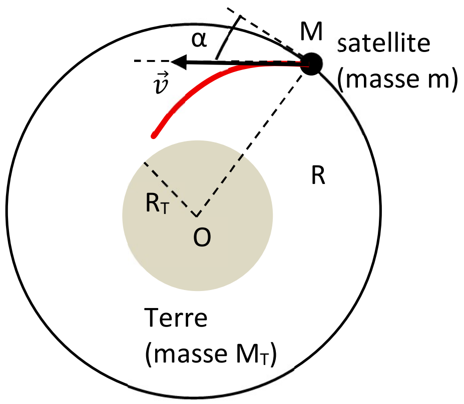
- Sur la trajectoire elliptique, le nouveau moment cinétique est $\vec{L} = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}$ soit en norme $L = mRv_0cos\alpha$

  => constante des aires $C = \frac{L}{m} = Rv_0cos\alpha$

  => énergie potentielle effective $E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{R^2v_0^2co\ ^2\alpha}{r^2} - \frac{GmM_T}{r} < E_{peff0}(r) = \frac{1}{2}m\frac{R^2v_0^2}{r^2} - \frac{Gm\ \ _T}{r}$

  => la courbe de $E_{peff}(r)$ est en dessous de celle de $E_{peff}\ \ (r)$





La vitesse étant inchangée lors du choc, le satellite a une énergie mécanique E_m constante.

La droite $E_m = cste$ se situe au-dessus de la courbe $E_{peff}(r)$ pour r compris entre r_{min} et r_{max}

=> <u>la nouvelle trajectoire est elliptique</u>

b-On cherche r_{min}. Si $r_{min} < R_T$ alors le satellite s'écrase sur Terre.

r_{min} est tel que : $E_m = E_{peff}(r)$ avec $E_m = -\frac{GmM_T}{2R}$ (énergie mécanique pour une trajectoire circulaire)

Soit : $\frac{1}{2}m\frac{R^2v_0^2co\ ^2\alpha}{r^2} - \frac{Gm\ \ _T}{r} = -\frac{Gm\ \ _T}{2R}$ ou $\frac{GM_T}{2R}r^2 - GM_Tr + \frac{1}{2}R^2v_0^2cos^2\alpha = 0$

Comme $Rv_0^2 = GM_T$, cela donne finalement : $r^2 - 2Rr + R^2cos^2\alpha = 0$

La solution est : $r_{min} = R(1 - sin\alpha)$

Il y a écrasement du satellite sur la Terre si : $\boxed{sin\alpha > 1 - \frac{R_T}{R}}$
