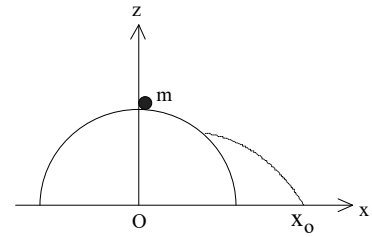


## 2.3 Energie-Exercice 3

On considère une demi-sphère de rayon  $R$  sur laquelle est posée une masse  $m$ . Celle-ci est lancée, avec une vitesse initiale négligeable, du haut de la sphère. On néglige les frottements.

Déterminer le point d'impact  $x_0$  sur le sol.



Etape 1 : étude du glissement de la masse  $m$  sur la sphère jusqu'au décollage en un point D

Référentiel d'étude :  $R(Oxyz)$  lié au laboratoire, galiléen

Système :  $m$

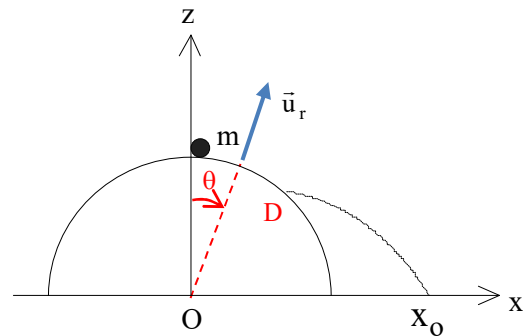
Actions sur  $m$  :

- Poids
- Réaction normale du support

Loi de la quantité de mouvement :  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

Selon  $\vec{u}_r$  :  $-mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N$

D'où :  $N = m(g \cos \theta - R\dot{\theta}^2)$



Loi de l'énergie cinétique entre le point de départ et une position quelconque :

$$\frac{1}{2} m(R\dot{\theta})^2 - 0 = W_{\text{poids}} = mg(R - R \cos \theta) \quad \text{D'où : } \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta) \quad \text{que l'on reporte dans l'expression de } N$$

On trouve donc la réaction normale :  $N = mg(3 \cos \theta - 2)$

On en déduit la valeur  $\theta_d$  de  $\theta$  au moment du décollage :  $N = 0 \Rightarrow \theta_d = \text{Arc cos}\left(\frac{2}{3}\right)$

Le décollage se fait au point D de coordonnées :  $x_D = R \sin \theta_d = \frac{\sqrt{5}}{3} R$  ;  $z_D = R \cos \theta_d = \frac{2}{3} R$

Il se fait avec la vitesse :  $\vec{v}_D = \dot{x}_D \vec{u}_x + \dot{z}_D \vec{u}_z = R\dot{\theta}_d (\cos \theta_d \vec{u}_x - \sin \theta_d \vec{u}_z) = R \sqrt{\frac{2g}{3R}} \left( \frac{2}{3} \vec{u}_x - \frac{\sqrt{5}}{3} \vec{u}_z \right)$

Ce sont les conditions initiales pour la deuxième phase du mouvement.

Etape 2 : étude de la chute libre à partir du point D

Loi de la quantité de mouvement :  $m\vec{a} = m\vec{g}$

En projection dans la base cartésienne :  $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dot{x}_D t + x_D \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_D t + z_D \end{cases}$

D'où l'équation cartésienne de la trajectoire :  $z = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x - x_D}{\dot{x}_D} \right)^2 + \dot{z}_D \left( \frac{x - x_D}{\dot{x}_D} \right) + z_D$

On cherche le point d'impact de coordonnées  $(x_0, 0)$

$$-\frac{1}{2} g \left( \frac{x_0 - x_D}{\dot{x}_D} \right)^2 + \dot{z}_D \left( \frac{x_0 - x_D}{\dot{x}_D} \right) + z_D = 0 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 \left( x_D + \frac{\dot{x}_D \dot{z}_D}{g} \right) + x_D^2 + \frac{2}{g} \dot{x}_D (x_D \dot{z}_D - \dot{x}_D z_D) = 0$$

On remplace  $x_D, z_D, \dot{x}_D, \dot{z}_D$  par leurs expressions en fonction de  $R$  ce qui donne l'équation du second degré :

$$x_0^2 - 2x_0 \frac{5\sqrt{5}}{27} R - \frac{R^2}{3} = 0 \quad \text{de solution : } x_0 = \frac{5\sqrt{5} + \sqrt{368}}{27} R \approx 1,12R$$