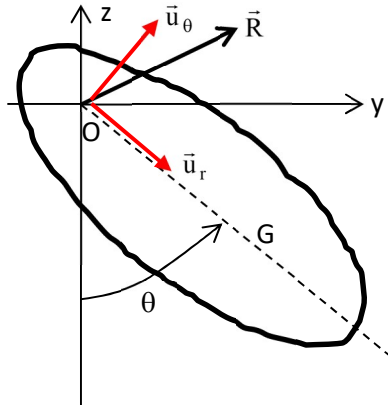


2.7 Mouvement d'un solide-Exercice 3

Soit un pendule pesant de masse m , de moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe Ox . On note $d = OG$. Le pendule est écarté d'un angle θ_0 puis abandonné sans vitesse initiale.

Calculer la réaction de l'axe $\vec{R}$ de composantes R_y et R_z en fonction de m , g , d , I_Δ , θ_0 et θ .



Loi de la quantité de mouvement au pendule dans le référentiel du laboratoire galiléen : $m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{R}$

On a : $\vec{a}_G = -d\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + d\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -d\dot{\theta}^2 (-\cos\theta \vec{u}_z + \sin\theta \vec{u}_y) + d\ddot{\theta} (\cos\theta \vec{u}_y + \sin\theta \vec{u}_z)$

Donc : $\vec{a}_G = (-d\dot{\theta}^2 \sin\theta + d\ddot{\theta} \cos\theta) \vec{u}_y + (d\dot{\theta}^2 \cos\theta + d\ddot{\theta} \sin\theta) \vec{u}_z$

$$D'où : \begin{cases} m(-d\dot{\theta}^2 \sin\theta + d\ddot{\theta} \cos\theta) = R_y \\ m(d\dot{\theta}^2 \cos\theta + d\ddot{\theta} \sin\theta) = R_z - mg \end{cases}$$

Pour exprimer $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ on écrit la loi scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe fixe de rotation Ox :

$$I_\Delta \ddot{\theta} = M_{\text{ext}}(\Delta) = M_{\text{liaison pivot}}(\Delta) + M_{\text{poids}}(\Delta) = -mgd \sin\theta \quad (\text{bras de levier } d\sin\theta)$$

$$\text{Donc : } \ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I_\Delta} \sin\theta$$

$$\text{Et } \ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I_\Delta} \sin\theta \quad \text{s'intègre en } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \cos\theta + \text{cste}$$

$$\text{A } t = 0, \text{ on suppose que } \dot{\theta}(0) = 0 \text{ et } \theta(0) = \theta_0 \text{ donc : } \text{cste} = -\frac{mgd}{I_\Delta} \cos\theta_0$$

$$D'où : \dot{\theta}^2 = \frac{2mgd}{I_\Delta} (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

En reportant dans R_y et R_z , on trouve :

$$R_y = mg \frac{md^2}{I_\Delta} \sin\theta [2 \cos\theta_0 - 3 \cos\theta]$$

$$R_z = mg \left[1 + \frac{md^2}{I_\Delta} (3 \cos^2\theta - 2 \cos\theta \cos\theta_0 - 1) \right]$$

Contrôle : pour $\theta = \theta_0 = 0$, on vérifie que $R_y = 0$ et $R_z = mg$