

# Chapitre 32

## Séries numériques et familles sommables

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1 Définitions

#### 1.1 Série

##### Définition 1.1 (Série, terme général, somme partielle)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

- La série de terme général  $u_n$ , notée  $\sum u_n$ , est la suite  $(S_n)_n$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , le réel  $u_n$  est le **terme général** de la série.
- Le réel  $S_n$  est la **somme partielle d'indice  $n$**  de la série.

##### Remarques.

- Connaissant la suite  $(S_n)_n$ , on peut étudier la suite  $(u_n)_n$  car  $u_n = S_n - S_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .
- Plus généralement, toute suite  $(u_n)$  peut être étudiée comme une série, car  $u_n - u_0 = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1})$  : on étudie la série de terme général  $u_n - u_{n-1}$ .
- On peut également considérer des suites et des séries définies à partir d'un rang  $n_0$ . Dans ce cas,  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$  et on note par exemple la série  $\sum_{p \geq n_0} u_p$ .
- Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc aux séries. Mais ce qui nous intéresse, c'est l'étude de la série, non pas à l'aide des sommes partielles, mais seulement à partir de son terme général.

#### 1.2 Convergence et divergence

##### Définition 1.2 (Série convergente/divergente)

Une série  $\sum u_n$  est convergente si la suite  $(S_n)_n$  des sommes partielles est convergente. Elle est divergente dans le cas contraire.

**Définition 1.3 (Somme d'une série convergente)**

Soit  $\sum u_n$  une série convergente. La limite de la suite des sommes partielles  $(S_n)_n$  est appelée **somme de la série** et est notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

**Remarques.**

1. Ne pas confondre  $\sum u_n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .
2. Si  $\sum u_n$  est une série convergente, et  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est aussi une série convergente, dont la somme vaut  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ , et on a la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n,$$

*cf.* les restes d'une série convergente.

**Exemples.**

1. La série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge. En effet, si  $n \geq 1$ , notons  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Supposons  $(h_n)$  convergente vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors  $h_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , donc  $h_{2n} - h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Or,

$$h_{2n} - h_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

ce qui est une contradiction. La série diverge.

2. Cns de convergence d'une série de terme général constant ? Trouvez-là !

**Proposition 1.4 (Convergence d'une série à terme général complexe)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. La série  $\sum u_n$  est convergente si et seulement si les séries  $\sum \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum \operatorname{Im}(u_n)$  convergent, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n).$$

**Démonstration.**

Une suite complexe est convergente si et seulement si ses parties réelles et imaginaires sont convergentes. ■

**Définition 1.5 (Nature d'une série)**

La nature d'une série  $\sum u_n$  est son caractère convergent ou divergent. Étudiez la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

**Exemple.**

On pose  $u_n = (-1)^n$ . Nature de la série  $\sum u_n$ ? Écrivez ce que valent les sommes partielles, et regardez ce qui se passe (réponse : divergente).

## 2 Propriétés

### 2.1 Propriétés des séries convergentes

**Proposition 2.1 (Combinaisons linéaires de séries convergentes)**

Les combinaisons linéaires de séries convergentes sont convergentes, et la somme d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des sommes.

**Remarques.**

- Autrement dit, si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont deux séries convergentes, et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , alors  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$  est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- On ne peut rien dire en général sur la somme de séries divergentes. Elles peuvent être convergentes ou divergentes. Par exemple, les séries  $\sum (-1)^n$  et  $\sum (-1)^{n+1}$  sont divergentes, et la série  $\sum((-1)^n + (-1)^n) = 2\sum (-1)^n$  diverge et  $\sum((-1)^n + (-1)^{n+1}) = \sum 0$  converge.
- La somme d'une série divergente et d'une série convergente est une série divergente. En effet, la somme des sommes partielles est la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente, donc une suite divergente.
- Le résultat est faux pour le produit : si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont des séries convergentes, en général,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \neq \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right),$$

comme le prouve l'exemple  $(u_n) = (v_n) = (1, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ .

- D'ailleurs, le produit des termes généraux de deux séries convergentes n'est pas convergent en général : prenez  $u_n = v_n = (-1)^n / \sqrt{n}$ .
- Par contre, si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent et sont à termes positifs, alors  $\sum u_n v_n$  converge : à partir d'un certain rang, on a  $0 \leq v_n \leq 1$  (le terme général tend vers 0, donc  $0 \leq u_n v_n \leq u_n$ ).
- ATTENTION : si  $\sum(u_n + v_n)$  est convergente, on n'écrit JAMAIS  $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  avant d'avoir vérifié que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont convergentes.

**Proposition 2.2 (Terme général d'une série convergente)**

Soit  $\sum u_n$  une série convergente. Alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Démonstration.**

Soit  $(S_n)_n$  la suite des sommes partielles. Alors la sous-suite  $(S_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  a la même limite que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donc la différence converge vers 0, *i.e.*  $S_n - S_{n-1} = u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . ■

**Remarque.**

Attention, la réciproque est fautive comme le prouve l'exemple de la série harmonique. Son terme général  $1/n$  tend vers 0, mais la série est divergente.

**Définition 2.3 (Divergence grossière)**

Une série  $\sum u_n$  diverge grossièrement si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0.

**Proposition 2.4**

Une série grossièrement divergente est divergente.

**Démonstration.**

On a vu qu'une série convergente a un terme général qui tend vers 0. ■

**2.2 Restes d'une série convergente****Définition 2.5 (Reste d'ordre  $n$ )**

Soit  $\sum u_n$  une série convergente de somme  $S$ , et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le **reste d'ordre  $n$**  de  $\sum u_n$  est le scalaire

$$R_n = S - S_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p - \sum_{p=0}^n u_p.$$

**Proposition 2.6 (Écriture  $S_n + R_n$ )**

Soit  $\sum u_n$  une série convergente. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $R_n$  le reste d'ordre  $n$ . La série  $\sum_{p \geq n+1} u_p$  est convergente et

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p, \text{ et de plus,}$$

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n = \sum_{p=0}^n u_p + \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

**Démonstration.**

Comme toujours, il faut regarder les sommes partielles. Si  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq n + 1$ , on a

$$\sum_{k=n+1}^p u_k = S_p - S_n \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} S - S_n = R_n,$$

et par définition de la notation,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^p u_k$ . ■

**Proposition 2.7 (Convergence de la suite des restes)**

Soit  $\sum u_n$  une série convergente, et  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des restes. Alors  $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , ou encore

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Démonstration.**

Par définition, on a  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$ , donc  $R_n = S - S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . ■

### 2.3 Lien série-suite

**Proposition 2.8 (Lien série-suite)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. La série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ont même nature.

**Démonstration.**

Soit  $(S_n)$  la suite des sommes partielles. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a par télescopage,  $S_n = u_n - u_0$ , donc  $(S_n)$  converge si et seulement si  $(u_n)$  converge. ■

**Remarque.**

On peut donc étudier une suite grâce à une série.

## 3 Exemples

**Proposition 3.1 (Série géométrique)**

Soit  $a \in \mathbb{K}$ . La série  $\sum a^n$  converge si et seulement si  $|a| < 1$ , et dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ .

**Démonstration.**

On peut remarquer que si  $|a| \geq 1$ , alors la série diverge grossièrement.

Si  $|a| < 1$ , on a

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1 - a},$$

car  $a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . ■

**Proposition 3.2 (Série exponentielle)**

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum \frac{a^n}{n!}$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ .

**Démonstration.**

On a déjà démontré ce résultat grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange. ■

**Définition 3.3 (Séries spéciales alternées)**

Une série spéciale alternée est une série  $\sum (-1)^n u_n$  où  $(u_n)$  est une suite décroissante convergente vers 0.

**Proposition 3.4 (Convergence des séries spéciales alternées)**

Une série spéciale alternée est convergente.

**Démonstration.**

Remarquons déjà que pour tout  $n$ , on a  $u_n \geq 0$  (suite décroissante qui tend vers 0). Soit alors  $(S_n)$  la suite des sommes partielles. Montrons que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont des suites adjacentes. Cela prouvera qu'elles convergent, et qu'elles ont même limite. Et cela prouvera aussi que  $(S_n)$  converge (proposition 3.19 du chapitre 12), donc que la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \quad \text{et} \quad S_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k = S_{2n} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2},$$

donc  $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$  car  $(u_n)$  est décroissante. Donc  $(S_{2n})$  est décroissante.

De même,

$$S_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k u_k \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k = S_{2n-1} + (-1)^{2n} u_{2n} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1},$$

donc  $S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geq 0$  car  $(u_n)$  est décroissante. Donc  $(S_{2n+1})$  est croissante.

Enfin,

$$S_{2n} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

donc  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes. ■

## 4 Séries de nombres réels positifs

### Définition 4.1 (Série à termes positifs)

Une série  $\sum u_n$  est à termes positifs si  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Théorème 4.2 (Convergence de séries à termes positifs)

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

#### Démonstration.

Soit  $(S_n)$  la suite des sommes partielles. Alors  $S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$  donc  $(S_n)$  est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée. ■

### Proposition 4.3

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs. Si la série converge, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{p=0}^n u_p \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . Sinon,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

### Théorème 4.4

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$ . Alors

1. Si  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge aussi et dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
2. Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge aussi (vers  $+\infty$ ).

#### Démonstration.

Soient  $(S_n)$  et  $(S'_n)$  les sommes partielles respectives de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ . Par hypothèse, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n \leq S'_n$ . On en déduit que :

- Si  $\sum v_n$  converge,  $(S'_n)$  converge, donc est majorée, donc  $(S_n)$  est majorée. Or, c'est une suite croissante car  $u_n \geq 0$  pour tout  $n$ , donc elle est convergente, *i.e.*  $\sum u_n$  converge.
  - Si  $\sum u_n$  diverge,  $(S_n)$  aussi, et comme  $(S_n)$  est croissante, elle diverge vers  $+\infty$ , donc  $\sum v_n$  également, et  $\sum v_n$  diverge.
- Ceci prouve la proposition. ■

#### Remarque.

On peut se contenter de  $u_n \leq v_n$  à partir d'un rang  $n_0$ . Mais alors on n'aura que  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ .

#### Exemples.

1.  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge car  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.
2.  $\sum \frac{1}{n(n-1)}$  converge (prouvez-le avec une DES de  $\frac{1}{X(X-1)}$  et un télescopage), donc  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

**Corollaire 4.5 (Termes positifs dominés, négligeables)**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $u_n = o(v_n)$  ou  $u_n = O(v_n)$ .

1. Si  $\sum v_n$  converge, la série  $\sum u_n$  converge également.
2. Si  $\sum u_n$  diverge, la série  $\sum v_n$  diverge également.

**Démonstration.**

Dans les deux cas, à partir d'un certain rang  $u_n \leq K v_n$ , où  $K$  est une constante  $> 0$ . On applique alors le théorème 4.4 en remplaçant  $v_n$  par  $K v_n$ , car  $\sum v_n$  converge si et seulement si  $\sum K v_n$  converge puisque  $K \neq 0$ . ■

**Exemple.**

On a  $e^{-\sqrt{n}} = O(1/n^2)$ , donc la série  $\sum e^{-\sqrt{n}}$  converge.

**Corollaire 4.6 (Séries à termes positifs équivalents)**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $u_n \sim v_n$ . Alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature (*i.e.* elles sont simultanément convergentes ou divergentes).

**Démonstration.**

À partir d'un certain rang, on a  $\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$ , ou encore  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$ . On conclut alors soit avec le théorème 4.4, soit le corollaire 4.5. ■

**Remarques.**

1. Si les termes généraux sont équivalents, et l'une des séries est à termes positifs, l'autre l'est aussi à partir d'un certain rang.
2. On a bien entendu le même résultat avec des suites négatives : ce qui est important, c'est que le signe reste constant.

**Exemple.**

La série  $\sum \frac{1}{n^2 + (-1)^n n}$  converge car  $\frac{1}{n^2 + (-1)^n n} \sim \frac{1}{n^2}$ , et  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série à termes positifs convergente.

**Remarque.**

On va beaucoup utiliser ce corollaire avec les séries absolument convergentes (théorème 5.2) et les développements asymptotiques, *cf.* la méthode 5.4

## 5 Absolue convergence

### Définition 5.1 (Absolue convergence)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels ou complexes. La série  $\sum u_n$  est *absolument convergente* lorsque la série  $\sum |u_n|$  converge.

### Exemple.

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  est absolument convergente, car  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

### Théorème 5.2 (Convergence absolue implique la convergence)

Soit  $\sum u_n$  une série absolument convergente. Alors  $\sum u_n$  converge. De plus, on a  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

### Démonstration.

**Facultatif.** Considérons d'abord le cas d'un terme général réel. On pose

$$u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc  $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ ,  $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ . Par comparaison de séries à termes positifs, les séries  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  sont convergentes. Comme  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ , par différence de séries convergentes,  $\sum u_n$  converge.

Enfin, en appliquant l'inégalité triangulaire aux sommes partielles

$$\left| \sum_{p=0}^n u_p \right| \leq \sum_{p=0}^n |u_p|,$$

la conservation des inégalités larges par passage à la limite donne l'inégalité sur les sommes.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à termes complexes, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$  et  $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$ . Les parties réelle et imaginaire sont donc absolument convergentes (par comparaison de séries à termes positifs), donc convergentes, donc la série  $\sum u_n$  est convergente. ■

### Remarque.

La réciproque est fautive : il existe des séries convergentes non absolument convergentes, comme par exemple  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ . C'est une série spéciale alternée, donc elle converge, mais  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

### Exemple.

La série  $\sum \frac{e^{in}}{n^2}$  est convergente. En effet,  $\left| \frac{e^{in}}{n^2} \right| = \frac{|e^{in}|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ . Or,  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, donc par comparaisons de séries à termes positifs,  $\sum \left| \frac{e^{in}}{n^2} \right|$  converge, donc  $\sum \frac{e^{in}}{n^2}$  est absolument convergente, donc convergente.

### Corollaire 5.3 (Séries à termes dominés)

Soient  $\sum u_n$  une série complexe, et  $\sum v_n$  une série à termes positifs, avec  $\sum v_n$  convergente. Si  $u_n = O(v_n)$  ou si  $u_n = o(v_n)$ , la série  $\sum u_n$  converge absolument.

**Démonstration.**

À partir d'un certain rang,  $|u_n| \leq Av_n$  où  $A$  est une constante. On conclut avec le théorème 7.2 en remplaçant  $u_n$  par  $|u_n|$  et  $v_n$  par  $Av_n$ . ■

**Méthode 5.4 (Utilisation de développements asymptotiques)**

Voici un exemple d'utilisation de la convergence absolue et de séries à termes positifs équivalents/dominés.

Soit  $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ . Comme  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)$  avec  $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ , alors

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + v_n,$$

où  $v_n = -\frac{1}{3n^{3/2}} - \frac{1}{3n^{3/2}}\varepsilon((-1)^n/\sqrt{n})$ .

On en déduit que  $|v_n| \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ . Or,  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  converge (cf. plus loin les séries de Riemann), donc par équivalence de séries à termes constants,  $\sum v_n$  converge absolument, donc converge.

Mais  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge (c'est une série spéciale alternée), et  $\sum(-\frac{1}{2n})$  diverge (série harmonique), donc  $\sum u_n$  diverge car c'est la somme de deux séries convergentes et d'une série divergente.

**Remarque.**

**Attention :** cette méthode illustre aussi qu'il ne faut pas utiliser les équivalents lorsque les séries ne sont pas à termes de signe constant. En effet,  $u_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$ , et  $\sum(-1)/\sqrt{n}$  converge (série spéciale alternée), or  $\sum u_n$  diverge !

## 6 Comparaison série-intégrale

### 6.1 Comparaison des natures

**Proposition 6.1 (Comparaison série-intégrale)**

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[n_0, +\infty[$ , positive et décroissante. La série  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$

et la suite  $\left(\int_{n_0}^n f(t)dt\right)_{n \geq n_0}$  sont de même nature. Plus précisément, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , on a

$$\int_{n_0}^n f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t)dt + f(n_0).$$

**Démonstration.**

**Facultatif.** On traite le cas  $n_0 = 0$ . On va démontrer la double-égalité. Fixons donc  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [0, n]$ . Comme  $f$  est décroissante, si  $x \in [k, k+1]$ , on a  $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ . Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k).$$

On somme alors la première inégalité de  $k = 0$  à  $k = n - 1$ , ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) = \sum_{\ell=1}^n f(\ell) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_0^n f(t) dt,$$

et en ajoutant  $f(0)$  aux deux membres, on obtient  $\sum_{\ell=0}^n f(\ell) \leq \int_0^n f(t) dt + f(0)$ .

On somme alors de  $k = 0$  à  $k = n$  l'inégalité de droite :

$$\sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k).$$

Or,  $f$  est positive, donc  $\int_0^n f(t) dt \leq \int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k)$ .

Puis, si la série  $\sum f(n)$  converge, les sommes partielles sont majorées car convergente, donc la suite  $(\int_0^n f(t) dt)$  est majorée. Or, c'est une suite croissante car  $f$  est positive, donc  $(\int_0^n f(t) dt)$  converge.

Réciproquement, si  $(\int_0^n f(t) dt)$  converge, c'est une suite majorée, donc  $(\int_0^n f(t) dt + f(0))$  aussi, donc les sommes partielles de  $\sum f(n)$  sont majorées, donc la série converge (série à termes positifs majorée). ■

### Remarques.

1. On applique en général cette proposition quand on connaît une primitive de  $f$ , et qu'on sait calculer la limite de l'intégrale, pour en déduire la nature de la série.
2. Attention : en cas de convergence, les limites ne sont pas les mêmes en général.
3. Écrire les cas particuliers  $n_0 = 0$  et  $n_0 = 1$ . Ils sont fréquents !

### Exemple.

La série  $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$  diverge. On prend  $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ , et  $n_0 = 2$ . La fonction  $f$  est bien continue, positive et décroissante, et

$$\int_1^n \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc la série diverge.

### Remarque.

**Facultative.** Lorsque la fonction  $f$  est croissante (et positive) non décroissante, la série et la suite des intégrales sont divergente vers  $+\infty$  dans tous les cas.

## 6.2 Application aux séries de Riemann

### Théorème 6.2 (Séries de Riemann)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$

### Démonstration.

Si  $\alpha \leq 0$ , la série diverge grossièrement. Fixons alors  $\alpha > 0$ . La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est donc positive et décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Or, si  $\alpha \neq 1$ ,

$$\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[ \frac{1-\alpha}{x^{\alpha-1}} \right]_1^n = (1-\alpha) \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right),$$

qui admet une limite finie si et seulement si  $\alpha > 1$ . Le cas  $\alpha = 1$  donne un logarithme et une limite infinie. ■

**Exemple.**

Les séries  $\sum \frac{1}{n^2}$  et  $\sum \frac{1}{n^{(3/2)}}$  convergent, et les séries  $\sum \frac{1}{n}$  et  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  divergent.

## 7 Familles sommables

Toutes les démonstrations sur les familles sommables sont facultatives.

Notation : on note  $\mathcal{P}_f(I)$  l'ensemble des parties finies d'un ensemble  $I$ .

### 7.1 Motivation

Paragraphe facultatif.

Lors de l'étude des séries, les termes sont rangés dans un ordre précis. Or, si on change cet ordre, la nature de la série peut changer, et en cas de convergence, la somme n'est plus nécessairement la même, comme le montre l'exemple de la série harmonique alternée  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ . Cette série est une série spéciale alternée, donc

convergente. On verra en exercice que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ . Pourtant, en remarquant que pour tout entier  $k \geq 1$ , on a

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} = \frac{1}{2(2k-1)},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2(2k-1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

ce qui prouve que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$  : contradiction. On ne peut pas ranger les termes comme on veut.

Puis on remarque que pour les séries à termes positifs, en notant  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$  si la série diverge, on a le résultat suivant :

**Théorème** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une série à termes positifs. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{i \in F} a_i \mid F \text{ partie finie de } \mathbb{N} \right\}.$$

Ce théorème nous pousse aux définitions du paragraphe suivant.

## 7.2 Familles sommables de réels positifs

### Définition 7.1 (Famille sommable de réels positifs)

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs indexée par un ensemble  $I$ .

1. On note  $\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{k \in F} a_k \mid F \text{ partie finie de } I \right\}$ .
2. La famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si  $\sum_{i \in I} a_i < +\infty$ .

### Remarque.

**Facultatif.** On montrera en exercice que si la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, au plus un nombre dénombrable d'éléments de la famille sont non nuls, *i.e.* la famille est à support dénombrable.

### Proposition 7.2 (Comparaison)

Soient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  des familles de réels positifs telles que, pour tout  $i \in I$ ,  $a_i \leq b_i$ . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

En particulier, si  $(b_i)_{i \in I}$  est sommable,  $(a_i)_{i \in I}$  l'est également.

### Démonstration.

Soit  $F$  une partie finie non vide de  $I$ . On a

$$\sum_{k \in F} a_k \leq \sum_{k \in F} b_k \leq \sum_{i \in I} b_i,$$

d'où l'inégalité. ■

### Proposition 7.3 (Sous-famille d'une famille sommable)

Toute sous-famille d'une famille sommable de réels positifs est sommable.

### Démonstration.

Il suffit de compléter la sous-famille par des 0, et appliquer 7.2. ■

### Proposition 7.4 (Invariance par permutation)

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs indexée par un ensemble  $I$ , et  $\sigma$  une permutation de  $I$ . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}.$$

En particulier, la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si la famille  $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$  l'est.

**Démonstration.**

Notons  $M$  et  $M_\sigma$  les deux sommes, éventuellement  $+\infty$ . Soit  $F$  une partie finie non vide de  $I$ . Alors

$$\sum_{k \in F} a_{\sigma(k)} = \sum_{k' \in \sigma(F)} a_{k'} \leq M$$

car  $\sigma(F)$  est une partie finie de  $I$ . On en déduit que  $M_\sigma \leq M$ . Puis de même (ou en considérant  $\sigma^{-1}$ ), on a  $M \leq M_\sigma$ . ■

**Remarque.**

Par exemple dans le cas d'une série à termes positifs, on peut ranger les termes dans l'ordre que l'on souhaite pour calculer sa somme.

**Proposition 7.5 (Lien familles finies/séries)**

1. Une famille finie de réels positifs est sommable, et sa somme est la somme usuelle.
2. Une suite à termes positifs est sommable si et seulement si la série correspondante est convergente, et dans ce cas, la somme de la série est la somme de la famille.

**Démonstration.**

On traite le cas d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Supposons la famille sommable, et soit  $S$  sa somme. Comme  $\llbracket 0, n \rrbracket$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq S,$$

donc la série (à termes positifs) est convergente. De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , par caractérisation d'une borne supérieure, il existe une finie  $F$  de  $\mathbb{N}$  telle que

$$S - \varepsilon \leq \sum_{k \in F} a_k \leq S,$$

et il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $F \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ , et donc

$$S - \varepsilon \leq \sum_{k \in F} a_k \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq S,$$

ce qui prouve que la somme de la série est  $S$ .

—Supposons que la série converge, et soit  $S$  sa somme. Soit  $F$  une partie finie de  $\mathbb{N}$ , et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $F \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors

$$\sum_{k \in F} a_k \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq S,$$

ce qui prouve que la famille est sommable, et donc par le 1er cas, que la somme de la famille est la somme de la série.

D'où la proposition. ■

### Proposition 7.6 (Opérations algébriques)

Soient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  des familles de réels positifs, et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ . Alors

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

En particulier, une combinaison linéaire à coefficients positifs de familles sommables est une famille sommable, dont la somme est la combinaison linéaire des sommes.

### Démonstration.

Supposons par exemple les deux familles sommables, et soient  $S, S'$  leur somme respective. Soit  $G$  une partie finie de  $I$ . On a donc

$$\sum_{k \in G} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k \in G} a_k + \mu \sum_{k \in G} b_k \leq \lambda S + \mu S',$$

ce qui prouve que la famille  $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I}$  est sommable, et que sa somme est inférieure à  $\lambda S + \mu S'$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe deux parties finies  $F$  et  $F'$  de  $I$  telles que

$$S - \varepsilon \leq \sum_{k \in F} a_k \quad \text{et} \quad S' - \varepsilon \leq \sum_{k \in F'} b_k.$$

Soit alors  $G = F \cup F'$ . On a donc

$$S - \varepsilon \leq \sum_{k \in F} a_k \leq \sum_{k \in G} a_k \quad \text{et} \quad S' - \varepsilon \leq \sum_{k \in F'} b_k \leq \sum_{k \in G} b_k,$$

et donc

$$\lambda S + \mu S' - (\lambda + \mu)\varepsilon \leq \sum_{k \in G} (\lambda a_k + \mu b_k),$$

ce qui donne la valeur de la somme. ■

### Théorème 7.7 (Somme par paquets)

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs, et  $(I_j)_{j \in J}$  une partition de  $I$  (où  $J$  est un ensemble d'indexation). Alors

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i = \sum_{i \in I} a_i.$$

En particulier, si la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, alors la famille  $\left( \sum_{i \in I_j} a_i \right)_{j \in J}$  est sommable.

### Démonstration.

Hors programme. ■

**Remarque.**

En particulier, si la famille est sommable, on peut regrouper les termes comme on le souhaite pour calculer la somme.

**Théorème 7.8 (Théorème de Fubini positif)**

Soit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels positifs, où  $I, J$  sont des ensembles d'indexation. Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}.$$

**Démonstration.**

La famille  $(I \times \{j\})_{j \in J}$  est un recouvrement de  $I \times J$ , et on applique la sommation par paquets. ■

### 7.3 Familles sommables de nombres complexes

**Définition 7.9 (Famille sommable de nombres complexes)**

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes indexée par un ensemble  $I$ . La famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si la famille  $(|a_i|)_{i \in I}$  est sommable.

On note  $\ell^1(I)$  l'ensemble des familles sommables indexées par  $I$ .

**Remarque.**

Comme pour les réels positifs, si la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, au plus un nombre dénombrable d'éléments de la famille sont non nuls, *i.e.* la famille est à support dénombrable.

**Proposition 7.10 (Comparaison)**

Soient  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes, et  $(b_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs sommables, telles que, pour tout  $i \in I$ ,  $|a_i| \leq b_i$ . Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable.

**Démonstration.**

C'est une conséquence de 7.2. ■

**Proposition 7.11 (Sous-famille d'une famille sommable)**

Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

**Démonstration.**

On complète la sous-famille par des 0, et on applique 7.10. ■

**Proposition 7.12 (Invariance par permutation)**

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes indexée par un ensemble  $I$ , et  $\sigma$  une permutation de  $I$ . La famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si la famille  $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$  l'est.

**Démonstration.**

La famille  $(|a_i|)_{i \in I}$  est sommable, donc  $(|a_{\sigma(i)}|)_{i \in I}$  également par 7.4. ■

**Proposition 7.13 (Caractérisation des familles sommables)**

1. Une famille de réels  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si les familles de réels positifs  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  sont sommables.
2. Une famille de nombres complexes  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si les familles  $(\operatorname{Re}(a_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(a_i))_{i \in I}$  sont sommables.

**Démonstration.**

Cas d'une famille de réels :

Si  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable, comme  $|a_i^+| \leq |a_i|$  et  $|a_i^-| \leq |a_i|$ , les familles  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  sont sommables.

Réciproquement, si les familles  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  sont sommables, comme elles sont à termes positifs, donc leur somme est sommable (7.6), *i.e.*  $(|a_i|)_{i \in I}$  est sommable.

Cas d'une famille de nombres complexes : pour tout  $i \in I$ , on a

$$\max(|\operatorname{Re}(a_i)|, |\operatorname{Im}(a_i)|) \leq |a_i| \leq |\operatorname{Re}(a_i)| + |\operatorname{Im}(a_i)|,$$

ce qui prouve l'équivalence. ■

**Définition 7.14 (Somme d'une famille sommable)**

1. Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels sommable. Sa somme est le réel

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-.$$

2. Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes sommable. Sa somme est le nombre complexe

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(a_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(a_k).$$

**Proposition 7.15**

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes sommable et  $S = \sum_{k \in I} a_k$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie

finie  $J_\varepsilon \subset I$  telle que  $\left| S - \sum_{j \in J_\varepsilon} a_j \right| \leq \varepsilon$ .

**Démonstration.**

Cas d'une famille de réels : Notons  $S^+$  et  $S^-$  les sommes respectives des familles  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$ , et fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe des parties finies  $J^+$  et  $J^-$  de  $I$  telles que

$$S^+ - \varepsilon \leq \sum_{i \in J^+} a_i^+ \leq S^+, \quad S^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in J^-} a_i^- \leq S^-,$$

et en prenant  $J_\varepsilon = J^+ \cup J^-$ , on a donc (car on somme des réels positifs)

$$S^+ - \varepsilon \leq \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i^+ \leq S^+, \quad S^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i^- \leq S^-,$$

et donc

$$S^+ - S^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i^+ - \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i^- \leq S^+ - S^- + \varepsilon,$$

d'où l'implication dans le cas réel.

Traitons maintenant le cas d'une famille de nombres complexes. On note

$$\begin{aligned} r_k &= \operatorname{Re}(a_k), & s_k &= \operatorname{Im}(a_k), \\ S_r &= \sum_{k \in I} r_k, & S_i &= \sum_{k \in I} s_k, \\ S_r^+ &= \sum_{k \in I} r_k^+, & S_i^+ &= \sum_{k \in I} s_k^+ \\ S_r^- &= \sum_{k \in I} r_k^-, & S_i^- &= \sum_{k \in I} s_k^-. \end{aligned}$$

Rappelons que par la définition 7.14, la somme de la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est le nombre complexe  $S_r + iS_i$ , et que  $S_r = S_r^+ - S_r^-$  et  $S_i = S_i^+ - S_i^-$ .

Soit  $J$  une partie finie de  $I$ . On a alors

$$\begin{aligned} \left| S_r + iS_i - \sum_{k \in J} r_k - i \sum_{k \in J} s_k \right| &\leq \left| S_r - \sum_{k \in J} r_k \right| + \left| S_i - \sum_{k \in J} s_k \right| \\ &\leq \left| S_r^+ - \sum_{k \in J} r_k^+ \right| + \left| S_r^- - \sum_{k \in J} r_k^- \right| + \left| S_i^+ - \sum_{k \in J} s_k^+ \right| + \left| S_i^- - \sum_{k \in J} s_k^- \right| \end{aligned}$$

Fixons alors  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors quatre sous-parties finies  $J_1, \dots, J_4$  de  $I$  telles que

$$\left| S_r^+ - \sum_{k \in J_1} r_k^+ \right| \leq \varepsilon, \quad \left| S_r^- - \sum_{k \in J_2} r_k^- \right| \leq \varepsilon, \quad \left| S_i^+ - \sum_{k \in J_3} s_k^+ \right| \leq \varepsilon, \quad \left| S_i^- - \sum_{k \in J_4} s_k^- \right| \leq \varepsilon.$$

Soit alors  $J = \bigcup_{i=1}^4 J_i$ . Comme  $J_1 \subset J$  et que  $(r_i^+)_{i \in I}$  est une famille de réels positifs, on a

$$S_r^+ - \varepsilon \leq \sum_{k \in J_1} r_k^+ \leq \sum_{k \in J} r_k^+ \leq S_r^+,$$

donc

$$\left| S_r^+ - \sum_{k \in J} r_k^+ \right| \leq \varepsilon.$$

De même pour les trois autres valeurs absolues. On a donc finalement

$$\left| S_r + iS_i - \sum_{k \in J} r_k - i \sum_{k \in J} s_k \right| \leq 4\varepsilon,$$

d'où la proposition. ■

**Remarque.**

**Facultatif.** On a en fait le théorème suivant, plus précis, mais hors programme : une famille de nombres complexes  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement s'il existe  $S \in \mathbb{C}$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $J_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)$  telle que, pour tout  $F \in \mathcal{P}_f(I)$ , si  $J_\varepsilon \subset F$ , alors  $\left| S - \sum_{i \in F} a_i \right| \leq \varepsilon$ .

**Proposition 7.16 (Opérations algébriques)**

Soient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  des familles de nombres complexes sommables, et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Alors  $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I}$  est sommable et

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

**Proposition 7.17 (Lien familles finies/séries)**

1. Une famille finie de nombres complexes est sommable, et sa somme est la somme usuelle.
2. Une suite de nombres complexes est sommable si et seulement si la série associée est absolument convergente, et dans ce cas, la somme de la série est la somme de la famille.

**Démonstration.**

On traite le cas des séries : la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si et seulement si  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est, donc si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est absolument convergente (proposition 7.5).

Pour l'égalité des sommes : si  $(u_n)$  est une suite réelle, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^+ - \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^- \stackrel{\text{réels pos}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- \stackrel{\text{somme séries conv}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Lorsque  $(u_n)$  est une suite à termes complexes, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Im}(u_n) \stackrel{\text{réels}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n) \stackrel{\text{somme séries conv}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Re}(u_n) + i \operatorname{Im}(u_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

■

**Théorème 7.18 (Sommmation par paquets)**

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes sommable, et  $(I_j)_{j \in J}$  une partition de  $I$  (où  $J$  est un ensemble d'indexation). La famille  $\left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J}$  est sommable, et

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i = \sum_{i \in I} u_i.$$

**Démonstration.**

Hors programme. ■

**Théorème 7.19 (Théorème de Fubini)**

Soit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille sommable de nombres complexes, où  $I, J$  sont des ensembles d'indexation. Alors :

1.  $\forall i \in I$ , la famille  $(a_{ij})_{j \in J}$  est sommable, et la famille des sommes  $\left( \sum_{j \in J} a_{ij} \right)_{i \in I}$  est sommable.
2.  $\forall j \in J$ , la famille  $(a_{ij})_{i \in I}$  est sommable, et la famille des sommes  $\left( \sum_{i \in I} a_{ij} \right)_{j \in J}$  est sommable.
3. On a :  $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}.$

**Démonstration.**

La famille  $(I \times \{j\})_{j \in J}$  est un recouvrement de  $I \times J$ , et on applique la sommation par paquets. ■

**Proposition 7.20 (Produit de familles sommables)**

Soient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  des familles sommables de nombres complexes. Alors la famille  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable et  $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right).$

**Démonstration.**

Il suffit de prouver que la famille  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable, l'égalité des sommes s'obtenant alors par le théorème de Fubini, car  $\sum_{j \in J} a_i b_j = a_i \sum_{j \in J} b_j$  etc...

Soit  $F$  un sous-ensemble fini de  $I \times J$ . Il existe alors des sous-ensembles finis  $I'$  et  $J'$  de  $I$  et  $J$  tels que  $F \subset I' \times J'$ , et alors

$$\sum_{(i,j) \in F} |a_i b_j| \leq \sum_{(i,j) \in I' \times J'} |a_i b_j| = \left( \sum_{i \in I'} |a_i| \right) \left( \sum_{j \in J'} |b_j| \right) \leq \left( \sum_{i \in I} |a_i| \right) \left( \sum_{j \in J} |b_j| \right)$$

donc la famille  $(|a_i b_j|)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable, donc par définition la famille  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable. ■

**Remarque.**

Le résultat reste vrai pour le produit d'un nombre fini de familles sommables.

**Théorème 7.21 (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes)**

Soient  $\sum a_n, \sum b_n$  des séries de nombres complexes absolument convergentes. La série de terme général

$\left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est absolument convergente, et

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

**Démonstration.**

Par 7.20, la famille  $(a_i b_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_i b_j = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Mais  $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(k, n - k) \mid k \in [0, n]\}$ , qui constitue une partition de  $\mathbb{N}^2$ . Par le théorème 7.18,  $\left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

■

## 7.4 Fonction exponentielle

**Proposition 7.22**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente.

**Démonstration.**

Il suffit de montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , la série  $\sum \frac{x^n}{n!}$  converge, ce qui découle de  $\frac{x^n}{n!} = O(2^{-n})$ . ■

**Définition 7.23**

La fonction exponentielle est la fonction définie sur  $\mathbb{C}$  par  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

**Proposition 7.24**

Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$ , on a  $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$ .

**Démonstration.**

On a, en effectuant un produit de Cauchy,

$$\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + z')^n}{n!} = \exp(z + z').$$

■